

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 1 (73)

2025

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Липич А. О., Смирнов Ю. Г.</i> Измерение ближнего электромагнитного поля и восстановление параметров неоднородностей в диэлектрическом теле	3
<i>Фомин А. И., Титаренко В. И.</i> Операторы дифференциальной симметрии первого порядка канонических дифференциальных уравнений.....	13
<i>Гладков С. О., Богданова С. Б.</i> О строгом математическом определении формы брахистохроны при учете теплового эффекта в зоне контакта.....	29
<i>Ройтенберг В. Ш.</i> О бифуркациях периодической траектории, касающейся линий переключения в двух точках	45
<i>Тында А. Н.</i> Итерационные методы решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра I рода	58

ФИЗИКА

<i>Сокуров А. А., Рехвиашвили С. Ш.</i> Нековалентное взаимодействие атомов бора и азота	70
<i>Зинченко Т. О., Печерская Е. А., Кревчик В. Д., Коновалов С. В., Артамонов Д. В., Гурин С. А., Новичков М. Д., Макиевский А.</i> Исследование электронных и оптических свойств тонкопленочных покрытий на основе $\text{SnO}_2:\text{Sb}$	81
<i>Соловьев С. В.</i> Исследование теплообмена и магнитной гидродинамики при течении жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами.....	93

**UNIVERSITY PROCEEDINGS
VOLGA REGION
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

№ 1 (73)

2025

CONTENT

MATHEMATICS

<i>Lapich A.O., Smirnov Yu.G.</i> Measurement of the near electromagnetic field and restoration of inhomogeneity parameters in a dielectric body	4
<i>Fomin A.I., Titarenko V.I.</i> Differential symmetry operators first order canonical differential equations	13
<i>Gladkov S.O., Bogdanova S.B.</i> On a strict mathematical definition of the brachistochrone's shape taking into account the thermal effect in the contact zone	29
<i>Roitenberg V.Sh.</i> On bifurcations of a periodic orbit tangent to switching lines at two points	45
<i>Tynda A.N.</i> Iterative methods for solving quadratic Volterra integral equations of the first kind	58

PHYSICS

<i>Sokurov A.A., Rekhviashvili S.S.</i> Non-covalent interaction of boron and nitrogen atoms	70
<i>Zinchenko T.O., Pecherskaya E.A., Krevchik V.D., Konovalov S.V., Artamonov D.V., Gurin S.A., Novichkov M.D., Makievski A.</i> Investigation of the electronic and optical properties of thin-film coatings based on SnO ₂ :Sb	81
<i>Solov'ev S.V.</i> Research of heat transfer and magnetohydrodynamics in the flow of liquid between two coaxial cylinders	93

УДК 517.9

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-1

Измерение ближнего электромагнитного поля и восстановление параметров неоднородностей в диэлектрическом теле

А. О. Лапич¹, Ю. Г. Смирнов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹lapich.a@yandex.ru, ²smirnovyug@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Обратные задачи электромагнитного зондирования, направленные на определение внутренних параметров объекта по внешним измерениям электромагнитного поля, являются некорректно поставленными и сложными в вычислительном плане. Нелинейность и неустойчивость решений требуют применения специальных методов регуляризации. Разработка эффективных неитерационных методов решения таких задач, особенно для трехмерных объектов, остается актуальной задачей для различных областей, таких как медицинская визуализация, геофизика и неразрушающий контроль. Целью является разработка и анализ неитерационного метода решения обратной задачи электромагнитного рассеяния для определения диэлектрической проницаемости ограниченного трехмерного объекта по измерениям ближнего поля. *Материалы и методы.* Работа основана на решении прямой задачи дифракции монохроматической электромагнитной волны на ограниченном объемном рассеивателе с использованием сингулярного интегро-дифференциального уравнения электрического поля. Для решения обратной задачи предлагается двухшаговый неитерационный метод. Он основан на измерении ближнего поля, рассеянного объектом, и применяется для решений в конечномерных пространствах кусочно-постоянных функций. *Результаты.* Реализован метод решения обратной задачи электромагнитного рассеяния. Представлены результаты решения прямой и обратной задач. Получено сравнение коэффициентов прохождения для нескольких экспериментов. *Выводы.* Разработанный неитерационный метод решения обратной задачи электромагнитного рассеяния обеспечивает определение диэлектрической проницаемости ограниченного трехмерного объекта по измерениям ближнего поля. Метод демонстрирует эффективность и может быть применен в различных областях, требующих неинвазивного определения параметров объекта.

Ключевые слова: обратная задача, интегральное уравнение, краевая задача, численный метод, двухшаговый метод, коэффициент прохождения, волноводы

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по гранту Государственного задания (Пер. № 124020200015-7).

Для цитирования: Лапич А. О., Смирнов Ю. Г. Измерение ближнего электромагнитного поля и восстановление параметров неоднородностей в диэлектрическом теле // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 3–12. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-1

Measurement of the near electromagnetic field and restoration of inhomogeneity parameters in a dielectric body

A.O. Lapich¹, Yu.G. Smirnov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹lapich.a@yandex.ru, ²smirnovyug@mail.ru

Abstract. *Background.* The inverse problems of electromagnetic sensing, aimed at determining the internal parameters of the object from external measurements of the electromagnetic field, are incorrectly posed and computationally complex. Non-linearity and instability of solutions require the use of special regularization methods. The development of effective non-iterative methods for solving such problems, especially for three-dimensional objects, remains an urgent task for various fields such as medical imaging, geophysics and non-destructive testing. The purpose of the work is to develop and analyze a non-iterative method for solving the inverse electromagnetic scattering problem for determining the dielectric constant of a limited three-dimensional object based on near-field measurements. *Materials and methods.* The work is based on solving the direct problem of diffraction of a monochromatic electromagnetic wave on a limited volume diffuser using a singular integro-differential equation of an electric field. A two-step non-iterative method is proposed to solve the inverse problem. It is based on the measurement of the near field scattered by an object, and can be applied for solutions from finite-dimensional spaces of piecewise constant functions. *Results.* A method for solving the inverse problem of electromagnetic scattering is implemented. The results of solving the direct and inverse problems are presented. A comparison of transmission coefficients for several experiments is obtained. *Conclusions.* The developed non-iterative method for solving the inverse problem of electromagnetic scattering provides determination of the dielectric constant of a limited three-dimensional object based on near-field measurements. The method demonstrates its effectiveness and can be applied in various fields requiring non-invasive determination of object parameters.

Keywords: inverse problem, integral equation, boundary value problem, numerical method, two-step method, transmission coefficient, waveguides

Financing: the research was financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the grant of the State Assignment (Reg. No. 124020200015-7).

For citation: Lapich A.O., Smirnov Yu.G. Measurement of the near electromagnetic field and restoration of inhomogeneity parameters in a dielectric body. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):3–12. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-1

Введение

Обратные задачи электромагнитного зондирования относятся к классу некорректно поставленных задач, в которых требуется определить внутренние параметры объекта (например, распределение диэлектрической проницаемости, магнитной проницаемости, проводимости и др.) по результатам измерений внешнего электромагнитного поля. В отличие от прямых задач, где заданы параметры объекта и требуется определить рассеянное электромагнитное поле, обратные задачи характеризуются нелинейностью и неустойчивостью решения. Это означает, что небольшие изменения в измеренных данных могут приводить к значительным изменениям в восстанавливаемых параметрах объекта.

Это, как правило, нелинейная обратная задача, не имеющая единственного решения и чувствительная к шуму в данных. Поэтому для решения обратных задач используются методы регуляризации, которые вводят дополнительные ограничения, чтобы стабилизировать решение. Часто применяются метод наименьших квадратов с регуляризацией Тихонова и другие итерационные методы, стремящиеся минимизировать функционал, представляющий разницу между измеренным и модельным полем. Для данной задачи предлагается применение неитерационного метода решения обратной задачи электромагнитного рассеяния для определения диэлектрической проницаемости ограниченного трехмерного объекта. Метод основан на измерении ближнего поля, рассеянного объектом под воздействием монохроматической электромагнитной волны.

Сформулирована прямая задача о дифракции монохроматической электромагнитной волны на ограниченном объемном рассеивателе с заданной постоянной магнитной проницаемостью и известной неоднородной диэлектрической проницаемостью. Исходная краевая задача для уравнений Максвелла сводится к системе, состоящей из сингулярного интегро-дифференциального уравнения электрического поля по области неоднородности и интегрального представления полного электрического поля вне рассеивателя. Приведены основные результаты о разрешимости прямой задачи дифракции.

Затем решается обратная задача, заключающаяся в нахождении неизвестной диэлектрической проницаемости объемного тела заданной формы. Показано, что интегро-дифференциальное уравнение первого рода имеет не более одного решения в конечномерных пространствах кусочно-постоянных функций.

1. Постановка задачи и результаты вычислительного эксперимента

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на изотропном неоднородном диэлектрическом теле $Q \subset \mathbb{R}^3$ в форме полушара (рис. 1). Граница полушара ∂Q является кусочно-гладкой поверхностью. Внутри полушара относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r , а вне полушара среда однородна с постоянными значениями диэлектрической проницаемости ϵ_0 и магнитной проницаемости μ_0 .

Поле возбуждается точечным источником излучения в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$, порождающим электромагнитную волну $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, удовлетворяющую системе уравнений Максвелла вне этой точки:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_0. \end{cases} \quad (1)$$

Электромагнитное (полное) поле в точке состоит из двух составляющих: падающего поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ и поля $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$, рассеянного объектом Q :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s. \quad (2)$$

Решение прямой задачи дифракции – полное электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ – удовлетворяет в $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$ уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{cases} \quad (3)$$

Предполагаем, что на границе раздела двух сред выполняются условия непрерывности касательных компонент поля на границе области неоднородности:

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q} = 0, \quad (4)$$

условия конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3) \quad (5)$$

и условия Зоммерфельда на бесконечности. Подробная постановка задачи (1)–(5) и результаты о ее разрешимости имеются в [1].

Краевую задачу (1)–(5) можно свести [1] к системе, состоящей из интегро-дифференциального уравнения по области неоднородности:

$$\mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \quad (6)$$

и интегрального представления поля вне тела:

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}, \quad (7)$$

где $G(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}$; $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ – относительная диэлектрическая проницаемость. Магнитное поле всюду выражается через электрическое по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Введем в области Q вектор-функцию $\mathbf{J}(x) := (\varepsilon_r(x) - 1)\mathbf{E}(x)$, предполагая, что всюду в Q выполнено условие $|\varepsilon_r(x)| \geq \tilde{\varepsilon} > 1$.

Определение неизвестной диэлектрической проницаемости ограниченного объекта по измерениям ближнего поля вне его осуществляется двухшаговым методом [2–9]. Сначала решается линейное интегральное уравнение первого рода для нахождения тока поляризации внутри объекта, используя известные значения падающего и полного поля вне объекта (падающего поля $\mathbf{E}_0(x)$ и полного поля $\mathbf{E}(x)$ в некоторой области D), т.е. из представления поля вне рассеивателя получим уравнение для $\mathbf{J}(x)$:

$$(k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_0(x), \quad x \in D. \quad (8)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(x)$ вычисляется непосредственно через найденный ток поляризации:

$$\frac{\mathbf{J}(x)}{\varepsilon_r(x) - 1} - (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \quad (9)$$

Для случая полушара численный метод, базисные функции и необходимые расчетные формулы представлены в [10]. Отметим, что из формулы (9) относительная диэлектрическая проницаемость может быть найдена неоднозначно. Однозначность будет, если считать диэлектрическую проницаемость диагональным тензором. При этом для изотропного материала компоненты приближенно найденного тензора диэлектрической проницаемости будут незначительно отличаться друг от друга, что подтверждают вычислительные эксперименты.

На рис. 1 представлено решение задачи двухшаговым методом для полушара с неоднородностями, имеющими различные показатели, визуализированные цветовой шкалой. Сравнение решений прямой задачи (рис. 1,а) – точные значения, и решения обратной задачи (рис. 1,б) – приближенные значения, показывает небольшое расхождение в значениях относительных диэлектрических проницаемостей неоднородностей, однако положение и размер неоднородностей не изменяется. Таким образом, полученные в результате решения обратной задачи данные о положении и параметрах неоднородностей демонстрируют хорошую точность.

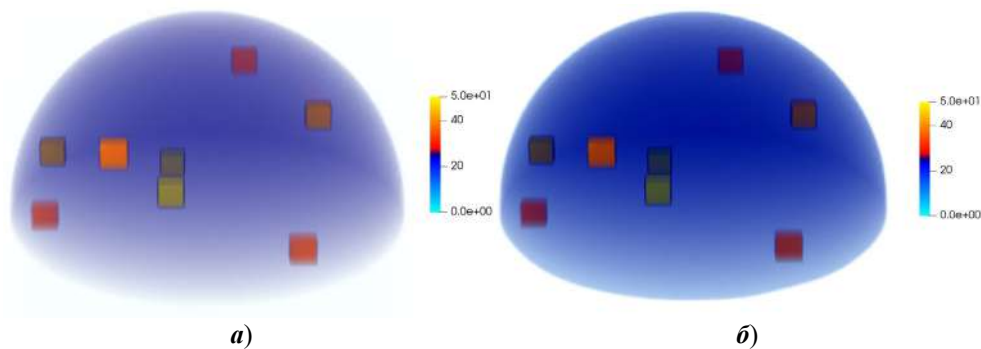


Рис. 1. Результат решения прямой и обратной задачи (исходные и восстановленные значения)

2. Измерительная установка и результаты эксперимента

В данной части работы показан измерительный комплекс, используемый для реального эксперимента, а также представлены результаты измерений.

Измерительная установка (рис. 2) состоит из двух направленных друг на друга волноводов (1 и 2 на рис. 3), между которыми в области ближней зоны располагался исследуемый образец с неоднородностью внутри него (3 на рис. 3). Положение второго волновода изменяется (происходит движение вокруг образца на небольшом расстоянии от него в двух направлениях – по сферическим координатам) для получения большого количества измерений.

Получение большого количества измерений принципиально важно для достижения достаточной точности решения обратной задачи. Как показывают эксперименты, достаточная точность может быть достигнута при количестве измерений больше 300.

Измерения проводились с помощью двухпортового векторного анализатора цепей Rohde&Schwarz (4 на рис. 3) и персонального компьютера в ча-

стотном диапазоне 5,3–5,7 ГГц. Полученные данные обрабатывались на персональном компьютере (5 на рис. 3). С целью использования волновода небольших размеров и измерений в указанном диапазоне частот волновод был заполнен диэлектриком (фторопласт-4). Абсолютная диэлектрическая проницаемость данного материала составляет 1,9–2,2. Диэлектрик изменяет диэлектрическую проницаемость среды внутри волновода. Это, в свою очередь, снижает скорость распространения электромагнитной волны по волноводу, поскольку скорость обратно пропорциональна квадратному корню из произведения относительных диэлектрической (ϵ) и магнитной (μ) проницаемостей. Отсюда происходит изменение критической (минимальной) частоты, при которой возможно распространение волн в направляющей системе.



Рис. 2. Измерительная установка

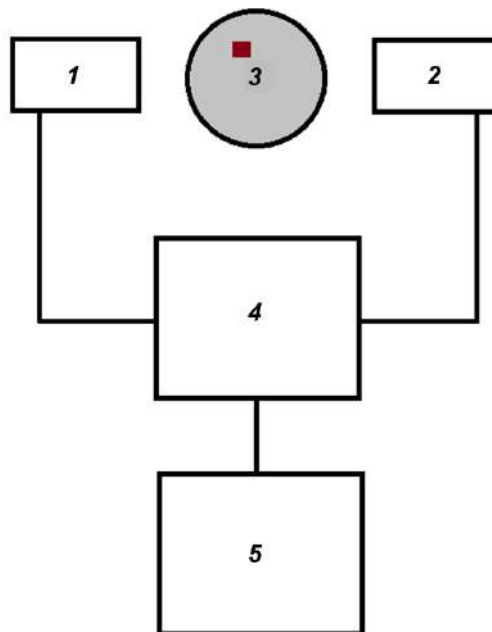


Рис. 3. Схема измерительной установки

На рис. 4, 5 показаны графики вещественной и мнимой частей коэффициента прохождения для одного положения волноводов (напротив друг друга) при наличии и отсутствии неоднородностей.

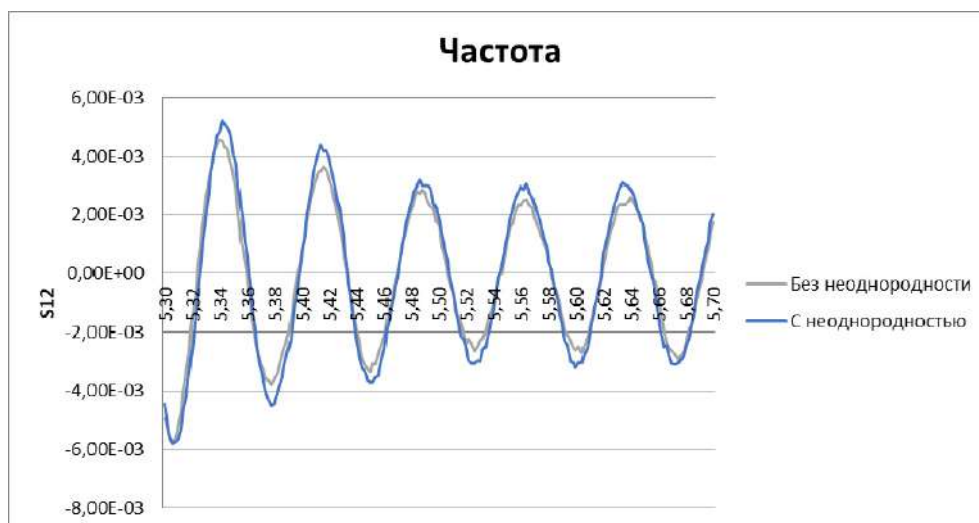


Рис. 4. Значение коэффициента прохождения (вещественная часть S_{12}) в зависимости от частоты для двух образцов

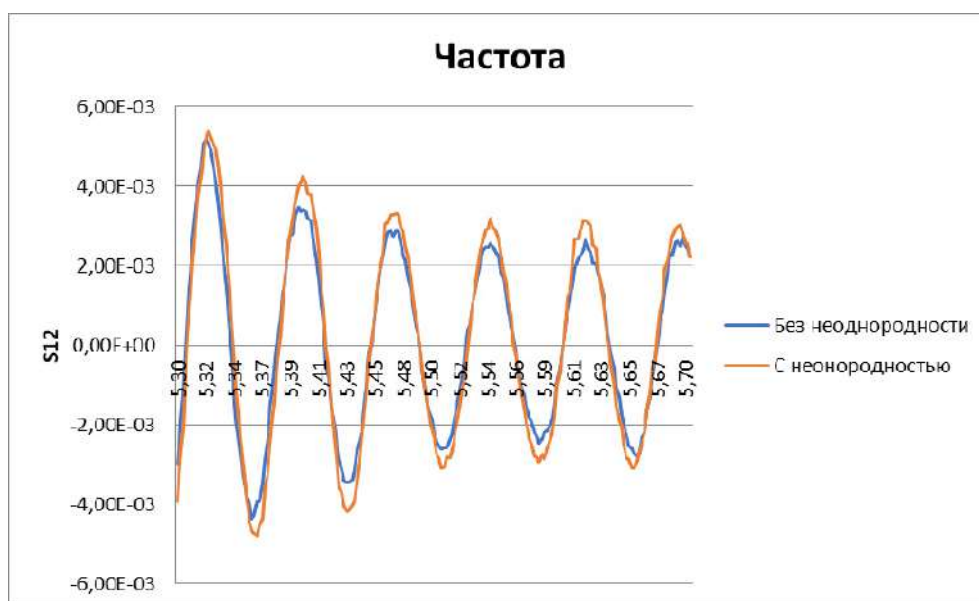


Рис. 5. Значение коэффициента прохождения (мнимая часть S_{12}) в зависимости от частоты для двух образцов

Сравнительный анализ графиков выявил значимые изменения коэффициента прохождения (как вещественной, так и мнимой частей) на рис. 4, 5. Представленные графики иллюстрируют результаты двух независимых экспериментов (образец с неоднородностью и без нее). Отличия на пиках синус-

соидальной кривой обусловлены влиянием неоднородности на прохождение электромагнитной волны.

Для восстановления неоднородности по результатам эксперимента необходимо использование данных всех измерений (при различных положениях волноводов) и решения обратной задачи с этими данными.

Заключение

В статье использован двухшаговый неитерационный метод решения электромагнитной обратной задачи СВЧ-томографии для определения структуры неоднородного диэлектрического тела по измерениям ближнего поля. Численное моделирование на примере полушара подтверждает высокую точность восстановления структуры. Экспериментальные исследования с использованием измерительной установки демонстрируют возможность обнаружения небольших неоднородностей в диэлектрике путем измерения электромагнитного поля на различных частотах в ближней зоне.

Список литературы

1. Смирнов Ю. Г. Задача дифракции электромагнитной волны на системе произвольно расположенных тел и экранов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 3-1. С. 36–42.
2. Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Решение векторной трехмерной обратной задачи дифракции на объемном неоднородном теле двухшаговым методом // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. Т. 56, № 4. С. 5–23.
3. Medvedik M. Y., Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Two-step method for solving inverse problem of diffraction by an inhomogeneous body // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 38th. Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics – PIERS 2017. 2018. Vol. 243. P. 83–92.
4. Medvedik M. Y., Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3d diffraction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. Vol. 28, № 10. P. 1474–1492.
5. Medvedik M. Y., Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2023. Vol. 32, № 3. P. 453–465.
6. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Алгоритм поиска неоднородностей в обратных нелинейных задачах дифракции // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2024. Т. 166, № 3. С. 395–406.
7. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод микроволновой томографии для решения обратной задачи на телах цилиндрической формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 107–117.
8. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2023. № 4. С. 142–153.
9. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод обобщенных и объединенных расчетных сеток для восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // Математическое Моделирование. 2024. Т. 36, № 4. С. 24–36.
10. Smirnov Y., Smolkin E., Snegur M. Solution of the Vector Three-Dimensional Inverse Problem on an Inhomogeneous Dielectric Hemisphere Using a Two-Step Method // Computation. 2024. Vol. 12. P. 213.

References

1. Smirnov Yu.G. The task of diffraction of the electromagnetic wave on the system of arbitrarily located bodies and screens. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy = Physics of wave processes and radio engineering systems*. 2017;20(3-1):36–42. (In Russ.)
2. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. The solution of a vector three - dimensional reverse problem of diffraction on a voluminous heterogeneous body with a two-step method // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;56(4):5–23. (In Russ.)
3. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Two-step method for solving inverse problem of diffraction by an inhomogeneous body. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 38th. Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics – PIERS 2017*. 2018;243:83–92.
4. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3d diffraction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020;28(10):1474–1492.
5. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity. *Journal of Inverse and III-Posed Problems*. 2023;32(3):453–465.
6. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. The algorithm for finding heterogeneity in the opposite non-linear tasks of diffraction. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki = Proceedings of Kazan University. Series: Physical and mathematical sciences*. 2024;166(3):395–406. (In Russ.)
7. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Microwave tomography method to solve the reverse problem on the bodies of a cylindrical shape. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(1):107–117. (In Russ.)
8. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. The method of restoring the parameters of heterogeneity of the body according to the results of measurements of the electromagnetic field. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, networks in economics, equipment, nature and society*. 2023;(4):142–153. (In Russ.)
9. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. The method of generalized and united calculated nets to restore the parameters of heterogeneity of the body according to the results of measurements of the electromagnetic field. *Matematicheskoe Modelirovanie = Mathematical modeling*. 2024;36(4):24–36. (In Russ.)
10. Smirnov Yu., Smolkin E., Snegur M. Solution of the Vector Three-Dimensional Inverse Problem on an Inhomogeneous Dielectric Hemisphere Using a Two-Step Method. *Computation*. 2024;12:213.

Информация об авторах / Information about the authors

Андрей Олегович Лапич

аспирант, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Andrey O. Lapich

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

E-mail: lapich.a@yandex.ru

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: smirnovyug@mail.ru

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 06.03.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 14.04.2025

Принята к публикации / Accepted 28.04.2025

УДК 517.956:512.812

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-2

Операторы дифференциальной симметрии первого порядка канонических дифференциальных уравнений

А. И. Фомин¹, В. И. Титаренко²²Государственный университет управления, Москва, Россия¹fomin45@mail.ru, ²vera_xmel@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Симметрия играет важную роль в механике и теоретической физике. Основными моделями в этих науках служат дифференциальные уравнения и системы уравнений. Поэтому изучение симметрий дифференциальных уравнений имеет не только теоретический, но и практический смысл. Канонические дифференциальные уравнения второго порядка являются одним из основных уравнений математической физики. В статье ставится задача описания операторов дифференциальной симметрии первого порядка канонических уравнений и образованных такими операторами алгебр Ли. *Материалы и методы.* Приведен краткий обзор общей теории дифференциальных замен зависимых переменных. Такие замены порождают операторы дифференциальной симметрии, а операторы первого порядка, в частности, образуют алгебры Ли относительно коммутатора. В общем виде описаны используемые понятия, введены канонические уравнения и инварианты Лапласа. *Результаты.* Сформулирована и доказана теорема о необходимых и достаточных условиях, при выполнении которых линейный дифференциальный оператор первого порядка является оператором дифференциальной симметрии канонического уравнения. Показано, как теорема применяется для описания множества операторов дифференциальной симметрии уравнений Эйлера – Пуассона. Установлен общий вид коммутатора операторов дифференциальной симметрии первого порядка и доказывается, что алгебра Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнений Эйлера – Пуассона изоморфна алгебре Ли матриц второго порядка. Найдены операторы дифференциальной симметрии канонических уравнений с постоянными коэффициентами, а также канонических уравнений вида $(\partial_{xy} + f(y)\partial_x + \varphi(x)\partial_y)v = 0$.

Алгебры Ли таких операторов оказываются разрешимыми четырехмерными алгебрами Ли с одномерным центром. *Выводы.* Полученные результаты представляются достаточно значимыми. Но основным результатом является теорема 1, которая может быть использована для описания алгебр Ли дифференциальной симметрии операторов первого порядка в других, не затронутых в этой статье, интересных случаях.

Ключевые слова: линейный дифференциальный оператор, операторы дифференциальной симметрии, алгебры Ли дифференциальной симметрии, каноническое дифференциальное уравнения

Для цитирования: Фомин А. И., Титаренко В. И. Операторы дифференциальной симметрии первого порядка канонических дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 13–28. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-2

Differential symmetry operators first order canonical differential equations

A.I. Fomin¹, V.I. Titarenko²

© Фомин А. И., Титаренко В. И., 2025. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

²State University of Management, Moscow, Russia¹fomin45@mail.ru, ²vera_xmel@mail.ru

Abstract. *Background.* Symmetries play an important role in mechanics and theoretical physics. The main models in these sciences are differential equations and systems of equations. Therefore, the study of symmetries of differential equations has not only theoretical, but also practical meaning. Canonical second-order differential equations are one of the basic equations of mathematical physics. The article sets the task of describing first-order differential symmetry operators of canonical equations and Lie algebras formed by such operators. *Materials and methods.* The introduction to this work is devoted to a brief overview of the general theory of differential substitutions of dependent variables. Such substitutions generate differential symmetry operators, and first-order operators, in particular, form Lie algebras with respect to the commutator. Paragraph 2 describes in general terms the concepts that are directly used in this article. Canonical equations and Laplace invariants are introduced. *Results.* In section 3, we formulate and prove a theorem on necessary and sufficient conditions under which a linear differential operator of the first order is an operator of differential symmetry of a canonical equation. In section 4, the theorem is used to describe the set of differential symmetry operators of the Euler-Poisson equations. In section 5, we establish the general form of the commutator of first-order differential symmetry operators and prove that the Lie algebra of first-order differential symmetry operators of the Euler-Poisson equations is isomorphic to the Lie algebra of second-order matrices. Section 6 contains the differential symmetry operators of canonical equations with constant coefficients, as well as canonical equations of the form. The Lie algebras of such operators turn out to be solvable four-dimensional Lie algebras with a one-dimensional center. *Conclusions.* The results obtained seem to be quite significant. But the main result is Theorem 1, which can be used to describe Lie algebras of differential symmetry of first-order operators in other interesting cases not covered in this paper.

Keywords: linear differential operator, differential symmetry operators, Lie algebras of differential symmetry, canonical differential equations

For citation: Fomin A.I., Titarenko V.I. Differential symmetry operators first order canonical differential equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):13–28. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-2

Введение

Разным аспектам теории симметрий дифференциальных уравнений посвящено немало фундаментальных трудов [1–6]. Особый тип симметрий составляют дифференциальные симметрии однородных линейных систем дифференциальных уравнений [7, 8]. Такие симметрии порождаются линейными дифференциальными заменами зависимых переменных, сохраняющими множество решений уравнения. Дифференциальные замены задаются линейными дифференциальными операторами (ЛДО), которые называются операторами дифференциальной симметрии уравнения или системы уравнений и образуют ассоциативные алгебры дифференциальной симметрии [8]. Операторы симметрии первого порядка составляют особое подмножество операторов симметрии, потому что коммутатор таких операторов является оператором того же типа. Следовательно, операторы дифференциальной симметрии однородных линейных систем дифференциальных уравнений образуют алгебры Ли. А действие алгебр Ли на решениях дифференциального уравнения открывает возможности применения теории представлений алгебр Ли.

Дифференциальные замены зависимых переменных, приводящие к операторам дифференциальной симметрии, являются частным случаем более общих замен, связывающих решения разных однородных линейных систем дифференциальных уравнений. Замены порождают ЛДО, которые в общей теории дифференциальных гомоморфизмов однородных линейных систем дифференциальных уравнений [9] называются линейными дифференциальными трансляторами. Трансляторы реализуют дифференциальные гомоморфизмы некоторых специальных фактормодулей над кольцами скалярных ЛДО. Особое значение для алгебр дифференциальной симметрии имеют дифференциальные изоморфизмы, с помощью которых устанавливаются изоморфизмы алгебр дифференциальной симметрии уравнений.

В этой статье изучаются операторы и алгебры дифференциальной симметрии первого порядка канонических гиперболических уравнений второго порядка для функций двух переменных (гл. 3, пар. 3.1 в [10]). К уравнениям этого типа приводит множество задач механики и математической физики. Исследование частных случаев таких уравнений и связанных с ними краевых задач занимались Эйлер, Лаплас, Пуассон и другие великие и выдающиеся математики. Гораздо меньшее внимание уделялось изучению дифференциальных связей между решениями канонических уравнений, в частности связей между решениями одного и того же уравнения, порождающих операторы дифференциальной симметрии. Главным достижением в этом направлении можно считать исследование предложенных Лапласом дифференциальных замен зависимых переменных нулевого и первого порядка [11]. Результатом этих исследований стало построение на основе преобразований Лапласа каскадного метода интегрирования некоторых типов канонических уравнений (гл. 3, пар. 3.2 в [12]).

С точки зрения общей теории [9] дифференциальные замены переменных, представляющие преобразования Лапласа, порождают дифференциальные изоморфизмы канонических уравнений [13]. Более того, в [14] доказано, что все дифференциальные изоморфизмы канонических уравнений первого порядка являются композициями преобразований Лапласа нулевого и первого порядка. Дифференциальные гомоморфизмы между каноническими уравнениями, которые не являются изоморфизмами, конечно, существуют. Например, дифференциальные связи между решениями класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу, изученные в работах [15, 16], приводят именно к гомоморфизмам первого порядка. Общие уравнения, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного дифференциального транслятора первого порядка, реализующего дифференциальный гомоморфизм пары канонических уравнений, получены в работе [17]. Но конкретные примеры гомоморфизмов, кроме [16], неизвестны.

1. Общие понятия об операторах дифференциальной симметрии, канонические уравнения

Обращаясь к операторам дифференциальной симметрии, опишем в самой общей форме понятия теории дифференциальных симметрий, которые будут использованы в этой работе. Пусть P – скалярный или матричный линейный дифференциальный оператор; V – линейное функциональное пространство; $Pv=0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение

(однородная система уравнений); V_P – подпространство решений уравнения. ЛДО a_1 такой, что $a_1 V_P \subseteq V_P$, называется оператором внешней дифференциальной симметрии уравнения $Pv=0$. Если существует такой ЛДО b_1 , что справедливо равенство $Pa_1 = b_1 P$, то ЛДО a_1 называется оператором внутренней дифференциальной симметрии. Различие между операторами внешней и внутренней дифференциальной симметрии пропадает, если для оператора P и пространства V выполняется теорема о нулях ЛДО (в [8] было использовано название «Теорема о делении ЛДО»). Суть теоремы о нулях заключается в том, что если ЛДО G обращается в нуль на решениях уравнения $Pv=0$, то существует ЛДО L такой, что верно равенство $G = LP$. В случае оператора дифференциальной симметрии $G = Pa_1$, а $L = b_1$.

В этой работе предполагается, что все функции определены в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, являются комплекснозначными и вещественно аналитическими. Каноническое гиперболическое уравнение второго порядка имеет вид

$$v_{xy} + a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v = (\partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c)v = Pv = 0. \quad (1)$$

Функции $h = a_x + ab - c$, $k = b_y + ab - c$ не изменяются в результате невырожденных замен зависимых переменных: $v \rightarrow u = \lambda v$, $\lambda(x, y) \neq 0$ в Ω (гл. 3, пар. 3.1 в [10]). Такие преобразования называются преобразованиями Лапласа нулевого порядка, а функции h и k называются инвариантами Лапласа. Для оператора $P = \partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c$ с вещественно аналитическими коэффициентами справедлива локальная теорема о нулях (теорема 4.1 в [8]). Поэтому в данном случае операторы внешней и внутренней дифференциальной симметрии уравнения $Pv=0$ совпадают. Алгебру Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнения $Pv=0$ с коммутатором $[a_1, \tilde{a}_1] = a_1 \cdot \tilde{a}_1 - \tilde{a}_1 \cdot a_1$ обозначим символом L .

2. Формулировка и доказательство основной теоремы

Теорема 1. ЛДО $a_1 = X\partial_x + Y\partial_y + Z \in L$ тогда и только тогда, когда справедливы равенства: $X = X(x)$, $Y = Y(y)$, $Z_y = a_x X + (aY)_y$, $Z_x = b_y Y + (bX)_x$, $(hX)_x + (hY)_y = 0$, $(kX)_x + (kY)_y = 0$. При этом оператор b_1 в определяющем равенстве $Pa_1 = b_1 P$ имеет вид $b_1 = X\partial_x + Y\partial_y + X_x + Y_y + Z$.

Доказательство. При умножении скалярных ЛДО главные символы перемножаются. Поэтому ЛДО b_1 в определяющем равенстве $Pa_1 = b_1 P$ должен иметь вид $b_1 = \tilde{X}\partial_x + \tilde{Y}\partial_y + \tilde{Z}$, и должны выполняться равенства $\tilde{X} = X$, $\tilde{Y} = Y$. Приравняем в равенстве $Pa_1 = b_1 P$ коэффициенты при одинаковых производных второго порядка. Выполнив очевидные преобразования, получим равенства: $X_y = 0$, $Y_x = 0$, $X_x + Y_y + Z = \tilde{Z}$. Следовательно, $X = X(x)$, $Y = Y(y)$, $b_1 = X\partial_x + Y\partial_y + X_x + Y_y + Z$. Приравняв коэффициенты при производных первого порядка и свободные члены, получим равенства

$$aX_x + Z_y + aZ = Xa_x + Ya_y + \tilde{Z}a, \quad bY_y + Z_x + bZ = Xb_x + Yb_y + \tilde{Z}b, \quad (2)$$

$$Z_{xy} + aZ_x + bZ_y + cZ = Xc_x + Yc_y + \tilde{Z}c. \quad (3)$$

Подставим в равенства (2) выражение $\tilde{Z} = X_x + Y_y + Z$ и получим

$$Z_y = a_x X + (aY)_y, \quad Z_x = b_y Y + (bX)_x. \quad (4)$$

Выражения $\tilde{Z} = X_x + Y_y + Z$, $Z_y = a_x X + (aY)_y$, $Z_x = b_y Y + (bX)_x$ подставим в (3). Сокращая и преобразуя, найдем: $Z_{xy} + ((ab - c)X)_x + ((ab - c)Y)_y = 0$. Подставляя в последнее равенство выражения $Z_{xy} = (Z_y)_x = (a_x X)_x + (a_x Y)_y$ и $Z_{xy} = (Z_x)_y = (b_y Y)_y + (b_y X)_x$, докажем необходимость равенств $(hX)_x + (hY)_y = 0$, $(kX)_x + (kY)_y = 0$. От последних равенств, используя (4) и $\tilde{Z} = X_x + Y_y + Z$, можно перейти к (3). А из (4), снова используя $\tilde{Z} = X_x + Y_y + Z$, получить (2). Равенства коэффициентов при производных второго и третьего порядка в определяющем равенстве тоже можно восстановить, используя условия теоремы.

3. Операторы дифференциальной симметрии первого порядка уравнений Эйлера – Пуассона

В общем случае уравнения Эйлера – Пуассона $E(\beta, \beta')$ имеют вид (гл. 3, пар. 3.2 в [10]):

$$P_{(\beta, \beta')} v = \left(\partial_{xy} - \frac{\beta'}{x-y} \partial_x + \frac{\beta}{x-y} \partial_y \right) v = 0. \quad (5)$$

Теорема 2. Если $|\beta'(1-\beta)| + |\beta(1-\beta')| \neq 0$, то операторы дифференциальной симметрии первого порядка уравнения (5) $a_1 = a_{\beta, \beta'} \in L(\beta, \beta')$ имеют вид

$$a_1 = a_{\beta, \beta'} = \left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) \partial_x + \left(c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y + c_3 \right) \partial_y + \frac{c_1}{2} (\beta x + \beta' y) + \rho, \quad (6)$$

где c_1, c_2, c_3, ρ – любые числа (произвольные постоянные).

Если $\beta = \beta' = 0$ или $\beta = \beta' = 1$, то операторы дифференциальной симметрии первого порядка уравнения (5) $a_{0,0}$ и $a_{1,1}$ задаются равенствами:

$$a_{0,0} = X(x) \partial_x + Y(y) \partial_y + \rho$$

и

$$a_{1,1} = X(x) \left(\partial_x + \frac{1}{x-y} \right) + Y(y) \left(\partial_y - \frac{1}{x-y} \right) + \rho. \quad (7)$$

В равенствах (7) функции $X(x)$, $Y(y)$ могут быть любыми.

Доказательство. $a = -\frac{\beta'}{x-y}$, $b = \frac{\beta}{x-y}$, $c = 0$, $h = \frac{\beta'(1-\beta)}{(x-y)^2}$,
 $k = \frac{\beta(1-\beta')}{(x-y)^2}$. Если $|\beta'(1-\beta)| + |\beta(1-\beta')| \neq 0$, то условия $(hX)_x + (hY)_y = 0$,

$(kX)_x + (kY)_y = 0$ эквивалентны равенству $\left(\frac{X(x)}{(x-y)^2}\right)_x + \left(\frac{Y(y)}{(x-y)^2}\right)_y = 0$.

Дифференцируя и умножая на $(x-y)^3$, получим уравнение $(x-y)(X' + Y') = 2(X - Y)$. Дифференцируем два раза по переменной x , а потом дважды по переменной y . Получим уравнения и равенства: $X'' + X'' + (x-y)X''' = 2X''$, $-Y'' - Y'' + (x-y)Y''' = -2Y''$, $X''' = 0$, $Y''' = 0$,
 $X(x) = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$, $Y(y) = \tilde{c}_1 \frac{y^2}{2} + \tilde{c}_2 y + \tilde{c}_3$. Подставим полученные выражения в уравнение $(x-y)(X' + Y') = 2(X - Y)$. Получим равенства: $(c_2 + \tilde{c}_2)x + (\tilde{c}_1 - c_1)xy - (c_2 + \tilde{c}_2)y = 2c_2x - 2\tilde{c}_2y + 2(c_3 - \tilde{c}_3)$, $\tilde{c}_1 - c_1 = 0$,
 $c_2 + \tilde{c}_2 = 2c_2$, $-(c_2 + \tilde{c}_2) = -2\tilde{c}_2$, $2(c_3 - \tilde{c}_3) = 0$; $\tilde{c}_1 = c_1$, $\tilde{c}_2 = c_2$, $\tilde{c}_3 = c_3$. Используя (4), найдем Z :

$$\begin{aligned} Z_x &= b_y Y + (bX)_x = \frac{\beta}{(x-y)^2} \left(\left(c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y + c_3 \right) - \left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) \right) + \\ &+ \frac{\beta}{(x-y)} (c_1 x + c_2) = \frac{\beta}{(x-y)^2} \left(\frac{c_1}{2} (y^2 - x^2) + c_2 (y - x) - (y - x)(c_1 x + c_2) \right) = \\ &= \frac{\beta}{(y-x)} \frac{c_1}{2} (y-x) = \frac{c_1}{2} \beta. \end{aligned}$$

Аналогично: $Z_y = a_x X + (aY)_y = \frac{c_1}{2} \beta'$, следовательно,

$$Z(x, y) = \frac{c_1}{2} (\beta x + \beta' y) + \rho.$$

В особых случаях $|\beta'(1-\beta)| + |\beta(1-\beta')| = 0$ оба инварианта Лапласа равны нулю. Поэтому равенства $(hX)_x + (hY)_y = 0$, $(kX)_x + (kY)_y = 0$ выполняются и функции $X(x)$, $Y(y)$ могут быть любыми. А само равенство (7) является прямым следствием следующего общего утверждения.

Лемма 1. Если $h = k$, т.е. $\beta = \beta'$, и выполняется равенство $(hX)_x + (hY)_y = 0$, то ЛДО $a_1 \in L$ имеет вид

$$a_1 = X(x)(\partial_x + b(x, y)) + Y(y)(\partial_y + a(x, y)) + \rho, \quad (8)$$

где ρ – любое число.

Доказательство. По условию $a_x + ab - c = b_y + ab - c$, поэтому $a_x = b_y$. Функции a_x, b_y в равенствах (4) можно поменять местами. Получим равенства: $Z_x = (Y(y)a(x, y) + X(x)b(x, y))_x$, $Z_y = (X(x)b(x, y) + Y(y)a(x, y))_y$. Следовательно, $Z(x, y) = X(x)b(x, y) + Y(y)a(x, y) + \rho$, и справедливы равенства (8) и (7).

Отметим, что при значениях параметров $\beta = \beta' = \alpha/2$ и переменных $x = \xi, y = -\eta$ уравнения (5) принимают вид гиперболических уравнений

Эйлера – Пуассона – Дарбу (ЭПД) $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\alpha}{2(\xi + \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$. В работах

[15, 16] изучались линейные дифференциальные соотношения первого порядка между решениями уравнений ЭПД. В частности, получены формулы, которые показывают, что представленные там операторы дифференциальной симметрии первого порядка имеют вид (6) [15, с. 178; 16, с. 35].

4. Алгебры Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнений Эйлера – Пуассона

Теорема 3. Если $|\beta'(1 - \beta)| + |\beta(1 - \beta')| \neq 0$, то алгебра Ли $L(\beta, \beta')$ изоморфна алгебре Ли матриц второго порядка $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$. Алгебры $L(0, 0)$ и $L(1, 1)$ являются прямыми суммами двух бесконечномерных алгебр Ли одномерных векторных полей на вещественной прямой и числового центра.

Доказательство. Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Коммутатор ЛДО $a_1 = X(x)\partial_x + Y(y)\partial_y + Z(x, y)$ и $\tilde{a}_1 = \tilde{X}(x)\partial_x + \tilde{Y}(y)\partial_y + \tilde{Z}(x, y)$ находится по формуле

$$[a_1, \tilde{a}_1] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)\partial_x + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)\partial_y + ((X\tilde{Z}_x - \tilde{X}Z_x) + (Y\tilde{Z}_y - \tilde{Y}Z_y)). \quad (9)$$

Если при этом $h = k$, то формула (9) принимает вид

$$[a_1, \tilde{a}_1] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)(\partial_x + b(x, y)) + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)(\partial_y + a(x, y)). \quad (10)$$

Доказательство. Применив равенства $X_y = \tilde{X}_y = 0, Y_x = \tilde{Y}_x = 0$, найдем

$$[a_1, \tilde{a}_1] = a_1\tilde{a}_1 - \tilde{a}_1a_1 = ((X\tilde{X}_x + X\tilde{Z} + Z\tilde{X}) - (\tilde{X}X_x + \tilde{X}Z + \tilde{Z}X))\partial_x + ((Y\tilde{Y}_y + Y\tilde{Z} + Z\tilde{Y}) - (\tilde{Y}Y_y + \tilde{Y}Z + \tilde{Z}Y))\partial_y + ((X\tilde{Z}_x + Y\tilde{Z}_y) - (\tilde{X}Z_x + \tilde{Y}Z_y)).$$

Сокращая, получим (9). Формула (10) следует из леммы 1 и формулы (9).

Пусть $|\beta'(1 - \beta)| + |\beta(1 - \beta')| \neq 0$, ЛДО $a_1, \tilde{a}_1$ имеют вид (6) с коэффициентами c_1, c_2, c_3, ρ и $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{\rho}$ соответственно. Применим формулу (9), получим

$$[a_1, \tilde{a}_1] = \left(\left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) (\tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2) - \left(\tilde{c}_1 \frac{x^2}{2} + \tilde{c}_2 x + \tilde{c}_3 \right) (c_1 x + c_2) \right) \partial_x +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\left(c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y + c_3 \right) (\tilde{c}_1 y + \tilde{c}_2) - \left(\tilde{c}_1 \frac{y^2}{2} + \tilde{c}_2 y + \tilde{c}_3 \right) (c_1 y + c_2) \right) \partial_y + \\
 & + \left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) \frac{\tilde{c}_1}{2} \beta - \left(\tilde{c}_1 \frac{x^2}{2} + \tilde{c}_2 x + \tilde{c}_3 \right) \frac{c_1}{2} \beta + \left(c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y + c_3 \right) \frac{\tilde{c}_1}{2} \beta' - \\
 & - \left(\tilde{c}_1 \frac{y^2}{2} + \tilde{c}_2 y + \tilde{c}_3 \right) \frac{c_1}{2} \beta' = \left(\frac{c_2 \tilde{c}_1 - c_1 \tilde{c}_2}{2} x^2 + (c_3 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_3 c_1) x + (c_3 \tilde{c}_2 - \tilde{c}_3 c_2) \right) \partial_x + \\
 & + \left(\frac{c_2 \tilde{c}_1 - c_1 \tilde{c}_2}{2} y^2 + (c_3 \tilde{c}_1 - c_1 \tilde{c}_3) y + (c_3 \tilde{c}_2 - c_2 \tilde{c}_3) \right) \partial_y + \\
 & + \frac{c_2 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 c_1}{2} (\beta x + \beta' y) + \frac{c_3 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_3 c_1}{2} (\beta + \beta'), \\
 & [a_1, \tilde{a}_1] = (c_2 \tilde{c}_1 - c_1 \tilde{c}_2) \left(\frac{x^2 \partial_x + y^2 \partial_y + \beta x + \beta' y}{2} \right) \partial_x + \\
 & + (c_3 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_3 c_1) (x \partial_x + y \partial_y + (\beta + \beta')/2) + (c_3 \tilde{c}_2 - \tilde{c}_3 c_2) (\partial_x + \partial_y). \quad (11)
 \end{aligned}$$

В линейном пространстве $L = L_{\beta, \beta'}$ выберем в качестве базисных векторов ЛДО $e_1 = (x^2 \partial_x + y^2 \partial_y + \beta x + \beta' y)/2$, $e_2 = x \partial_x + y \partial_y + (\beta + \beta')/2$, $e_3 = \partial_x + \partial_y$, $e_4 = 1$. Из (6) следует, что разложение ЛДО $a_{\beta, \beta'}$ по этому базису имеет такой вид:

$$a_{\beta, \beta'} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 - c_2 ((\beta + \beta')/2) e_4 + \rho e_4.$$

Пусть $\hat{\rho} = \rho - c_2 ((\beta + \beta')/2)$. Равенство (11) показывает, что коммутатор $[a_1, \tilde{a}_1]$ в координатной форме имеет вид

$$[a_1, \tilde{a}_1] = ((c_2 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 c_1), (c_3 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_3 c_1), (c_3 \tilde{c}_2 - \tilde{c}_3 c_2), 0). \quad (12)$$

В качестве базиса в линейном пространстве матриц второго порядка выберем матрицы:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отображение $a_1 = a_{\beta, \beta'} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \hat{\rho} e_4 \rightarrow c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + c_3 e'_3 + \hat{\rho} e'_4$ является изоморфизмом линейных пространств операторов симметрии и матриц второго порядка. В координатной форме это отображение имеет вид

$$\varphi: a_1 = (c_1, c_2, c_3, \hat{\rho}) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{2} + \hat{\rho} & -c_3 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} + \hat{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{2} & -c_3 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\rho} & 0 \\ 0 & \hat{\rho} \end{pmatrix}.$$

Вычислим коммутатор матриц $\varphi(a_1)$ и $\varphi(\tilde{a}_1)$ и сравним результат вычислений с равенством (12). Матрица $\begin{pmatrix} \hat{\rho} & 0 \\ 0 & \hat{\rho} \end{pmatrix}$ перестановочна с другими матрицами, поэтому при вычислении коммутатора матриц ее можно не учитывать. Получим:

$$\begin{aligned} [\varphi(a_1), \varphi(\tilde{a}_1)] &= \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{2} & -c_3 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{c}_2}{2} & -\tilde{c}_3 \\ \frac{\tilde{c}_1}{2} & \frac{\tilde{c}_2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{c}_2}{2} & -\tilde{c}_3 \\ \frac{\tilde{c}_1}{2} & \frac{\tilde{c}_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{2} & -c_3 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{c_2\tilde{c}_2}{4} - \frac{c_3\tilde{c}_1}{2} & \frac{c_2\tilde{c}_3}{2} - \frac{c_3\tilde{c}_2}{2} \\ -\frac{c_1\tilde{c}_2}{4} + \frac{c_2\tilde{c}_1}{4} & -\frac{c_1\tilde{c}_3}{2} + \frac{c_2\tilde{c}_2}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\tilde{c}_2c_2}{4} - \frac{\tilde{c}_3c_1}{2} & \frac{\tilde{c}_2c_3}{2} - \frac{\tilde{c}_3c_2}{2} \\ -\frac{\tilde{c}_1c_2}{4} + \frac{\tilde{c}_2c_1}{4} & -\frac{\tilde{c}_1c_3}{2} + \frac{\tilde{c}_2c_2}{4} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{c_3\tilde{c}_1 - \tilde{c}_3c_1}{2} & -(c_3\tilde{c}_2 - \tilde{c}_3c_2) \\ \frac{c_2\tilde{c}_1 - c_1\tilde{c}_2}{2} & \frac{c_3\tilde{c}_1 - \tilde{c}_3c_1}{2} \end{pmatrix} = \varphi([a_1, \tilde{a}_1]). \end{aligned}$$

Равенство $\varphi([a_1, \tilde{a}_1]) = [\varphi(a_1), \varphi(\tilde{a}_1)]$ показывает, что отображение φ является изоморфизмом алгебр Ли.

Рассмотрим особые случаи (7). Так как в этих случаях $h=k=0$, то можно применить лемму 2 и формулу (10). Если $\beta=\beta'=0$, то $a=0$, $b=0$, поэтому верно равенство

$$[a_{0,0}, \tilde{a}_{0,0}] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)\partial_x + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)\partial_y. \quad (13)$$

Если $\beta=\beta'=1$, то $a = -\frac{1}{x-y}$, $b = \frac{1}{x-y}$, и справедливо равенство

$$[a_{1,1}, \tilde{a}_{1,1}] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)\left(\partial_x + \frac{1}{x-y}\right) + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)\left(\partial_y - \frac{1}{x-y}\right). \quad (14)$$

В теореме 2 было показано, что функции $X(x)$, $Y(y)$ в (10) могут быть любыми. Из (7) следует, что в особых случаях множество операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнения (5) является прямой суммой двух функциональных линейных пространств и одномерного числового пространства. А формулы (13), (14) показывают, что коммутатор операторов симметрии вида $(X(x), Y(y), \rho)$ находится по формуле

$$[(X(x), Y(y), \rho), (\tilde{X}(x), \tilde{Y}(y), \tilde{\rho})] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x, Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y, 0).$$

То есть функциональные составляющие прямой суммы коммутируют по правилу коммутации векторных полей $X(x)\partial_x$, $\tilde{X}(x)\partial_x$ и $Y(y)\partial_y$, $\tilde{Y}(y)\partial_y$:

$$[X(x)\partial_x, \tilde{X}(x)\partial_x] = X\partial_x(\tilde{X}\partial_x) - \tilde{X}\partial_x(X\partial_x) = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)\partial_x,$$

$$[Y(y)\partial_y, \tilde{Y}(y)\partial_y] = Y\partial_y(\tilde{Y}\partial_y) - \tilde{Y}\partial_y(Y\partial_y) = (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)\partial_y$$

5. Другие примеры применения теоремы 1

Теорема 4. Операторы дифференциальной симметрии первого порядка канонического уравнения $(\partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c)v = Pv = 0$ с постоянными коэффициентами a, b, c $a_1 = a_1(a, b, c) \in L = L(a, b, c)$ имеют вид

$$a_1 = (c_1x + c_2)(\partial_x + b) + (-c_1y + c_3)(\partial_y + a) + \rho, \quad (15)$$

здесь c_1, c_2, c_3, ρ – любые числа. Множество L совпадает с коммутантом первого порядка оператора P : $L = \text{com } P = \{a_1 : Pa_1 = a_1P\}$. Справедливы равенства: $[L, L] = L^1 = c_2(\partial_x + b) + c_3(\partial_y + a)$, $\dim L^1 = 2$, $[L, L^1] = L^1$, $[L^1, L^1] = 0$. Следовательно, L является разрешимой алгеброй Ли. Алгебра L изоморфна подалгебре Ли алгебры верхних треугольных матриц четвертого порядка, у которых верхняя строка имеет вид $(c_1, c_3, 0, \rho)$, четвертый столбец имеет вид транспонированной строки $(\rho, 0, c_2, c_1)$, а остальные элементы равны нулю.

Доказательство. В данном случае $h = k = ab - c = \text{const}$. Уравнение $(hX)_x + (hY)_y = 0$ принимает вид $(X(x))_x = -(Y(y))_y$. В последнем равенстве слева стоит функция переменной x , справа функция переменной y . Переменные независимы, поэтому равенство возможно только тогда, когда обе части равны одной и той же константе: $(X(x))_x = -(Y(y))_y = c_1$. Интегрируя, найдем: $X(x) = c_1x + c_2$, $Y(y) = -c_1y + c_3$. Применим лемму 1, получим равенство (15).

В соответствии с теоремой 1 оператор b_1 в равенстве $Pa_1 = b_1P$ задается формулой $b_1 = X\partial_x + Y\partial_y + X_x + Y_y + Z$. ЛДО a_1 запишем в стандартном виде $a_1 = (c_1x + c_2)\partial_x + (-c_1y + c_3)\partial_y + (c_1x + c_2)b + (-c_1y + c_3)a + \rho$. Получим равенство

$$b_1 = (c_1x + c_2)\partial_x + (-c_1y + c_3)\partial_y + c_1 - c_1 + (c_1x + c_2)b + (-c_1y + c_3)a + \rho = a_1.$$

Значит, оператор a_1 перестановочен с оператором P , следовательно, $L = \text{com } P$.

Фиксируем в линейном пространстве L естественный базис: $e_1 = x(\partial_x + b) - y(\partial_y + a)$, $e_2 = \partial_x + b$, $e_3 = \partial_y + a$, $e_4 = 1$. Из равенства (15) следует, что в этом базисе ЛДО $a_1 \in L$ имеет вид $a_1 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \rho e_4$. Предположим, что ЛДО $\tilde{a}_1$ имеет такой же вид, как и a_1 , с коэффициентами $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4$. Применим формулу (10), получим равенства:

$$\begin{aligned}
[a_1, \tilde{a}_1] &= (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)(\partial_x + b) + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)(\partial_y + a) = \\
&= ((c_1x + c_2)\tilde{c}_1 - (\tilde{c}_1x + \tilde{c}_2)c_1)(\partial_x + b) + ((-c_1y + c_3)(-\tilde{c}_1) - (-\tilde{c}_1y + \tilde{c}_3)(-c_1)) \times \\
&\times (\partial_y + a) = (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1)(\partial_x + b) + (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3)(\partial_y + a), \\
[a_1, \tilde{a}_1] &= (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1)e_2 + (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3)e_3. \tag{16}
\end{aligned}$$

Равенство (16) показывает, что справедливо включение $[L, L] = L^1 \subseteq \subseteq \{\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 : \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}\}$. Полагая в формуле (16) $\tilde{c}_1 = 0$, получим:

$$[a_1, \tilde{a}_1] = (-\tilde{c}_2c_1)(\partial_x + b) + (\tilde{c}_3c_1)(\partial_y + a) = c_1(-\tilde{c}_2 e_2 + \tilde{c}_3 e_3). \tag{17}$$

Следовательно, $L^1 = \{c_2 e_2 + c_3 e_3 : c_2, c_3 \in \mathbb{C}\} = c_2(\partial_x + b) + c_3(\partial_y + a)$. Кроме того, $[L^1, L^1] = 0$. Следовательно, L – разрешимая алгебра Ли [18, с. 103, 104].

Пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Отображение $\varphi: a_1 = (c_1, c_2, c_3, \rho) \rightarrow C$ является линейным изоморфизмом пространства L на подалгебру матриц вида C алгебры Ли верхних треугольных матриц. Пусть $\tilde{a}_1 = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{\rho})$, $\varphi(\tilde{a}_1) = \tilde{C}$. Коммутатор матриц C и $\tilde{C}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
[\varphi(a_1), \varphi(\tilde{a}_1)] &= [C, \tilde{C}] = C\tilde{C} - \tilde{C}C = \\
&= \begin{pmatrix} c_1\tilde{c}_1 & c_1\tilde{c}_3 & 0 & c_1\tilde{\rho} + \rho\tilde{c}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2\tilde{c}_1 \\ 0 & 0 & 0 & c_1\tilde{c}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{c}_1c_1 & \tilde{c}_1c_3 & 0 & \tilde{c}_1\rho + \rho c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_2c_1 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_1c_1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Сравнив полученное равенство с равенством (16), убедимся, что справедливо равенство $\varphi([a_1, \tilde{a}_1]) = [\varphi(a_1), \varphi(\tilde{a}_1)]$. Значит, φ – изоморфизм алгебр Ли.

Теорема 5. Предположим, что каноническое уравнение имеет вид $Pv = (\partial_{xy} + f(y)\partial_x + \varphi(x)\partial_y)v = 0$, где функции $\varphi(x)$, $f(y)$ не обращаются в нуль ни в какой точке области Ω . ЛДО $a_1 \in L$ имеют вид

$$a_1 = (c_1\Phi(x) + c_2)\frac{1}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)) + (-c_1F(y) + c_3)\frac{1}{f(y)}(\partial_y + f(y)) + \rho, \quad (18)$$

где c_1, c_2, c_3, ρ – любые числа; $\Phi(x)$, $F(y)$ – фиксированные первообразные функций $\varphi(x)$ и $f(y)$ соответственно. Справедливы равенства:

$$[L, L] = L^1 = c_2\frac{1}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)) + c_3\frac{1}{f(y)}(\partial_y + f(y)), \quad \dim L^1 = 2, \quad [L, L^1] = L^1,$$

$[L^1, L^1] = 0$. L является разрешимой алгеброй Ли, изоморфной алгебре Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка канонического уравнения с постоянными коэффициентами (теорема 4).

Доказательство. Здесь $h = f_x + f(y)\varphi(x) = \varphi f$, $k = \varphi_y + \varphi(x)f(y) = \varphi f$, $h = k = \varphi f$. Равенства $(hX)_x + (hY)_y = 0$, $(kX)_x + (kY)_y = 0$ принимают вид

$$(\varphi(x)f(y)X)_x + (\varphi(x)f(y)Y)_y = f(y)(\varphi(x)X(x))_x + \varphi(x)(f(y)Y(y))_y = 0.$$

Разделим на $\varphi(x)f(y) \neq 0$, получим равенства:

$$\frac{(\varphi(x)X(x))_x}{\varphi(x)} + \frac{(f(y)Y(y))_y}{f(y)} = 0, \quad \frac{(\varphi(x)X(x))_x}{\varphi(x)} = -\frac{(f(y)Y(y))_y}{f(y)} = c_1 = \text{const},$$

$$(\varphi X)_x = c_1\varphi, \quad (fY)_y = -c_1f,$$

$$X(x) = \frac{1}{\varphi(x)}c_1 \int \varphi(x)dx = \frac{1}{\varphi(x)}(c_1\Phi(x) + c_2), \quad Y(y) = \frac{1}{f(y)}(-c_1F(y) + c_3).$$

Применив формулу (8), получим равенство (18).

В линейном пространстве L ЛДО

$$e_1 = \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)) - \frac{F(y)}{f(y)}(\partial_y + f(y)), \quad e_2 = \frac{1}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)),$$

$$e_3 = \frac{1}{f(y)}(\partial_y + f(y)), \quad e_4 = 1$$

образуют базис. Равенство (18) запишем в виде

$$a_1 = c_1 \left(\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)) - \frac{F(y)}{f(y)}(\partial_y + f(y)) \right) + c_2 \frac{\partial_x + \varphi(x)}{\varphi(x)} + c_3 \frac{\partial_y + f(y)}{f(y)} + \rho,$$

$$a_1 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \rho e_4.$$

Находим коммутатор ЛДО a_1 и $\tilde{a}_1$:

$$\begin{aligned}
X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x &= \frac{c_1\Phi(x) + c_2}{\varphi(x)} \left(\frac{\tilde{c}_1\Phi(x) + \tilde{c}_2}{\varphi(x)} \right)_x - \frac{\tilde{c}_1\Phi(x) + \tilde{c}_2}{\varphi(x)} \left(\frac{c_1\Phi(x) + c_2}{\varphi(x)} \right)_x = \\
&= \frac{1}{\varphi} \left[(c_1\Phi + c_2) \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi^2} (\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2) + \tilde{c}_1 \right) - (\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2) \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi^2} (c_1\Phi + c_2) + c_1 \right) \right] = \\
&= \frac{1}{\varphi} \left[-\frac{\varphi_x}{\varphi^2} \{ (c_1\Phi + c_2)(\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2) - (\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2)(c_1\Phi + c_2) \} + \right. \\
&\quad \left. + (c_1\Phi + c_2)\tilde{c}_1 - (\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2)c_1 \right] = \frac{c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1}{\varphi}.
\end{aligned}$$

Аналогично, $Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y = \frac{\tilde{c}_3c_1 - c_3\tilde{c}_1}{f(y)}$. Применим (10), получим:

$$\begin{aligned}
[a_1, \tilde{a}_1] &= (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1) \frac{1}{\varphi(x)} (\partial_x + \varphi(x)) + (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3) \frac{1}{f(y)} (\partial_y + f(y)), \\
[a_1, \tilde{a}_1] &= (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1)e_2 + (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3)e_3. \quad (19)
\end{aligned}$$

Сравнив равенство (19) с равенством (16), убедимся, что отображение

$$\begin{aligned}
\chi: c_1 \left(\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} (\partial_x + \varphi(x)) - \frac{F(y)}{f(y)} (\partial_y + f(y)) \right) + c_2 \frac{\partial_x + \varphi(x)}{\varphi(x)} + c_3 \frac{\partial_y + f(y)}{f(y)} + \rho \rightarrow \\
\rightarrow c_1 (x(\partial_x + b) - y(\partial_y + a)) + c_2(\partial_x + b) + c_3(\partial_y + a) + \rho
\end{aligned}$$

является изоморфизмом алгебр Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнения $Pv = (\partial_{xy} + f(y)\partial_x + \varphi(x)\partial_y)v = 0$ и канонического уравнения $(\partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c)v = Pv = 0$ с постоянными коэффициентами.

Однако, в отличие от теоремы 4, множество операторов дифференциальной симметрии первого порядка из теоремы 5 не совпадает с коммутантом соответствующего оператора. Оператор $b_1 = X\partial_x + Y\partial_y + X_x + Y_y + Z$ в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\varphi(x)} (c_1\Phi(x) + c_2)\partial_x + \frac{1}{f(y)} (-c_1F(y) + c_3)\partial_y + \left(\frac{1}{\varphi(x)} (c_1\Phi(x) + c_2) \right)_x + \\
&\quad + \left(\frac{1}{f(y)} (-c_1F(y) + c_3) \right)_y + (c_1\Phi(x) + c_2) + (-c_1F(y) + c_3) + \rho, \\
b_1 &= \frac{1}{\varphi(x)} (c_1\Phi(x) + c_2)\partial_x + \frac{1}{f(y)} (-c_1F(y) + c_3)\partial_y - \\
&\quad - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} (c_1\Phi(x) + c_2) - \frac{f'(y)}{f^2(y)} (-c_1F(y) + c_3) + (c_1\Phi(x) + c_2) + (-c_1F(y) + c_3) + \rho.
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М. : Наука, 1983. 280 с.
3. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / пер. с англ. И. Г. Щербак ; под ред. А. Б. Шабата. М. : Мир, 1989. 637 с.
4. Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. [и др.]. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. М. : Факториал Пресс, 2005. 380 с.
5. Фушчич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений квантовой механики. М. : Наука, 1990. 400 с.
6. Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М. : Наука, 1979. 320 с.
7. Желобенко Д. П. Трансвекторные алгебры в теории представлений и динамические симметрии // Теоретико-групповые методы в физике. М. : Наука, 1986. Т. 2. С. 5–21.
8. Fomin A. I. Differential symmetry algebras for linear homogeneous differential equations // Russian journal of mathematical physics. 1997. Vol. 5, № 2. P. 189–210.
9. Fomin A. I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations // Russian journal of mathematical physics. 2012. Vol. 19, № 2. P. 159–181.
10. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям с частными производными. М. : Издательство иностр. лит-ры, 1957. 444 с.
11. Laplace P. S. Recherches sur le calcul integral aux differences partielles // Memoires de l'Academie royale des Sciences de Paris. 1773. Vol. 77. P. 341–408 [перепечатано: Oeuvres completes. Paris: Gauthier–Villars, 1893. Vol. 9. P. 5–68].
12. Darouboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. 2 ed. Paris : Gauthier–Villars, 1915. Vol. 2.
13. Фомин А. И. Преобразования Лапласа как дифференциальные изоморфизмы // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. ст. по материалам XLIV–XLVIII междунар. науч.-практ. конф. М. : Интернаука, 2016. № 8-12 (35). С. 5–12.
14. Фомин А. И. Титаренко В. И. Дифференциальные изоморфизмы первого порядка канонических гиперболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 118–125.
15. Аксёнов А. В. Симметрии и соотношения между решениями класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу // Доклады РАН. 2001. Т. 381, № 2. С. 176–179.
16. Аксёнов А. В. Линейные дифференциальные соотношения между решениями класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу // Современная математика и её приложения. 2004. Т. 12. С. 3–37.
17. Фомин А. И., Титаренко В. И. Система определяющих уравнений для линейных дифференциальных трансляторов первого порядка семейства канонических гиперболических уравнений // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. ст. по материалам XL междунар. науч.-практ. конф. М. : Интернаука, 2016. № 4 (32). С. 15–27.
18. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М. : Наука, 1972. 336 с.

References

1. Ovsyannikov L.V. *Gruppovoy analiz differentsial'nykh uravneniy = Group analysis of differential equations*. Moscow: Nauka, 1978. (In Russ.)

2. Ibragimov N.Kh. *Gruppy preobrazovaniy v matematicheskoy fizike = Transformations groups in mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1983. (In Russ.)
3. Olver P. *Prilozhenie grupp Li k differentsial'nym uravneniyam = Application of groups to differential equations*. Transl. from Engl. by I.G. Shcherbak. Moscow: Mir, 1989:637. (In Russ.)
4. Bocharov A.V., Verbovetskiy A.M., Vinogradov A.M. et al. *Simmetrii i zakony sokhraneniya uravneniy matematicheskoy fiziki = Symmetry and laws of preserving the equations of mathematical physics*. Moscow: Faktorial, 1997. (In Russ.)
5. Fushchich V.I., Nikitin A.G. *Simmetriya uravneniy kvantovoy mekhaniki = Symmetry of the equations of quantum mechanics*. Moscow: Nauka, 1990. (In Russ.)
6. Malkin I.A., Man'ko V. I. *Dinamicheskie simmetrii i kogerentnye sostoyaniya kvantovoykh system = Dynamic symmetries and coherent conditions of quantum systems*. Moscow: Nauka, 1990. (In Russ.)
7. Zhelobenko D.P. Transmoteur algebras in the theory of representations and dynamic symmetry. *Teoretiko-grupповые metody v fizike = Theoretical and group methods in physics*. Moscow: Nauka, 1986;2:5–21. (In Russ.)
8. Fomin A.I. Differential symmetry algebras for linear homogeneous differential equations. *Russian journal of mathematical physics*. 1997;5(2):189–210.
9. Fomin A.I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations. *Russian journal of mathematical physics*. 2012;19(2):159–181.
10. Triкоми F. *Leksii po uravneniyam s chastnymi proizvodnymi = Lectures on equations with private derivatives*. Moscow: Izdatel'stvo inostr. lit-ry, 1957. (In Russ.)
11. Laplace P.S. Recherches sur le calcul integral aux differences partielles. *Memoires de l'Academie royale des Sciences de Paris*. 1773;77:341–408 [perepechatano: Oeuvres completes. Paris: Gauthier–Villars, 1893;9:5–68].
12. Darouboux G. *Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal*. 2 ed. Paris: Gauthier–Villars, 1915;2.
13. Fomin A.I. Laplace transformations as differential isomorphisms. *Nauchnaya diskussiya: voprosy matematiki, fiziki, khimii, biologii: sb. st. po materialam XLIV–XLVIII mezhdunar. nauch.-prakt. konf. = Scientific discussion: issues of mathematics, physics, chemistry, biology: proceedings of the 44th–48th international scientific and practical conference*. Moscow: Internauka, 2016;(8-12):5–12. (In Russ.)
14. Fomin A.I., Titarenko V.I. Differential isomorphisms of the first order of canonical hyperbolic equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(1):118–125. (In Russ.)
15. Aksenov A.V. Symmetry and the ratio between the solutions of the class of Euler - Poisson - Darbu. *Doklady RAN = Reports of the Russian Academy of Sciences*. 2001;381(2):176–179. (In Russ.)
16. Aksenov A.V. Linear differential relationships between the solutions of the class of Euler - Poisson - Darbu. *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya = Modern mathematics and its applications*. 2004;12:3–37. (In Russ.)
17. Fomin A.I., Titarenko V.I. The system of determining equations for linear differential translators of the first order of the family of canonical hyperbolic equations. *Nauchnaya diskussiya: voprosy matematiki, fiziki, khimii, biologii: sb. st. po materialam XL mezhdunar. nauch.-prakt. konf. = Scientific discussion: issues of mathematics, physics, chemistry, biology: proceedings of the 40th international scientific and practical conference*. Moscow: Internauka, 2016;(4):15–27. (In Russ.)
18. Kirillov A.A. *Elementy teorii predstavleniy = Elements of the theory of representations*. Moscow: Nauka, 1972. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Александр Иванович Фомин

кандидат физико-математических наук,
доцент, независимый исследователь
(Россия, г. Москва)

E-mail: fomin45@mail.ru

Aleksandr I. Fomin

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, independent
researcher (Moscow, Russia)

Вера Ивановна Титаренко

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и информатики, Институт
информационных систем,
Государственный университет
управления (Россия, г. Москва,
Рязанский проспект, 99)

E-mail: vera_xmel@mail.ru

Vera I. Titarenko

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics
and computer science, Institute
of Information Systems, State University
of Management (99 Ryazanskiy avenue,
Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 29.10.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 06.03.2025

Принята к публикации / Accepted 20.04.2025

УДК 531. 332.3

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-3

О строгом математическом определении формы брахистохроны при учете теплового эффекта в зоне контакта

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

^{1,2}Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет), Москва, Россия

¹sglad51@mail.ru, ²sonjaf@list.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* В настоящее время активно ведутся исследования, касающиеся свойств брахистохрон как линий с экстремальными свойствами. Актуальность настоящей работы обусловлена тем, что в ней впервые учтено влияние тепловых эффектов на форму брахистохроны. Главной целью исследования является аналитически строгое решение поставленной задачи. *Материалы и методы.* Основным методом решения задачи является метод подвижного базиса, хорошо зарекомендовавший себя при решении множества задач, связанных с исследованием различных свойств брахистохрон. *Результаты.* Приведено строгое аналитическое решение сформулированной задачи с учетом теплового эффекта, который был учтен с помощью введения диссипативной функции. *Выводы.* Благодаря предложенному в статье алгоритму сформулирован общий методический подход, полезный при решении подобного рода задач, связанных с учетом тепловых свойств материалов.

Ключевые слова: брахистохрона, градиент температуры, теплоемкость, подвижный базис, уравнения движения

Для цитирования: Гладков С. О., Богданова С. Б. О строгом математическом определении формы брахистохроны при учете теплового эффекта в зоне контакта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 29–44. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-3

On a strict mathematical definition of the brachistochrone's shape taking into account the thermal effect in the contact zone

S.O. Gladkov¹, S.B. Bogdanova²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

¹sglad51@mail.ru, ²sonjaf@list.ru

Abstract. *Background.* Current research on the properties of brachistochrones as lines with extreme properties indicates that this work is relevant because it takes into account for the first time the influence of thermal effects on the shape of the brachistochrone. The purpose of the study is an analytically rigorous solution to the problem. *Materials and methods.* The main method for solving the problem is the moving basis method, which has proven itself well in solving many problems related to the study of various properties of brachistochrones. *Results.* A rigorous analytical solution of the formulated problem is given, taking into account the thermal effect, which was taken into account by introducing a dissipative function. *Conclusions.* Thanks to the algorithm proposed in the article, a general methodological approach has been formulated that is useful in solving such problems related to taking into account the thermal properties of materials.

Keywords: brachystochrone, gradient of temperature, heat capacity, movable basis, equations of motion

For citation: Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On a strict mathematical definition of the brachistochrone's shape taking into account the thermal effect in the contact zone. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(1):29–44. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-3

Введение

Любые вопросы, возникающие в процессе исследования каких-либо классических свойств брахистохроны, всегда вызывали и продолжают вызывать искренний интерес со стороны читательской аудитории. И дело тут вовсе не в модной теме, а в возможности постановки огромного количества задач, которые возникают в процессе более глубокого и детального знакомства с проблематикой исследования – влияния на форму брахистохроны проявления каких-либо внешних физических факторов.

В своей классической постановке задачи о брахистохроне Я. Бернулли [1] сформулировал ее просто как кривую наискорейшего спуска под действием на движущееся тело лишь одной силы тяжести.

Позднее для ее аналитического решения был использован строгий математический аппарат вариационного исчисления, разработанный Л. Эйлером, тонкости подхода которого подробно описаны, например, в монографиях [1, 2]. Однако на этом задача не закрывается, а порождает массу других проблем, связанных прежде всего с исследованием свойств брахистохроны при учете сил как сухого трения [3–8], так и вязкого [9]. При их учете форма траектории движения естественным образом весьма существенно изменяется. Тем не менее она продолжает называться брахистохроной в устоявшейся терминологии, хотя по большому счету это уже не она. Ее можно было бы назвать, например, «сухотроной» или «вязкотроной», а при анализе решаемой ниже задачи с учетом теплового эффекта получающуюся в результате траекторию можно было бы именовать более коротко – «термотохроной». На наш взгляд, все эти три названия вполне логично пересекаются с уже довольно давно устоявшимся в науке термином «таутохрона», который придумали в Америке и который благополучно прижился во всем мире. По крайней мере, все три названия мгновенно информировали бы нас, о чем конкретно идет речь.

1. Постановка задачи

Задача, решению которой посвящено настоящее сообщение, относится к общим проблемам исследования динамики движения тел по криволинейным траекториям, а ее основная суть связана с выяснением возможного изменения формы желоба в условиях, когда может оказаться важным учет теплового фактора, обусловленного локальным эффектом разогрева зоны контакта.

Подобное проявление неидеальности взаимодействия тела со средой, когда речь идет о чисто механических задачах, с физической точки зрения может быть связано лишь с учетом сил трения. Простым примером этого может служить, например, разогрев шин автомобиля при их контакте с дорожным полотном, что приводит к существенному повышению температуры резинового покрытия.

В рамках нашей задачи мы не акцентируем внимание на конкретном материале шара, катящегося по желобу, поскольку в общей постановке задачи нам интересна лишь оценка влияния на качественное изменение траектории движения (формы желоба) теплового эффекта, связанного с локальным разогревом зоны контакта.

С математической точки зрения поставленную задачу мы будем решать с помощью метода подвижного базиса, хорошо зарекомендовавшего себя при решении ряда подобных задач (см., например, работы [10–12]).

Но, прежде чем переходить к строго математическим аспектам решения, стоит также отметить следующее. Решение поставленной задачи интересно по двум причинам. Во-первых, она вполне актуальна и не только потому, что ранее никем не решалась, а просто потому, что представляет собой весьма интересную с чисто теоретической точки зрения проблему. А, во-вторых, ее решение весьма значимо в плане практического приложения, поскольку позволяет внести соответствующие корректировки в форму желоба в условиях проявления теплового фактора (который, кстати, всегда имеет место в реальности) для достижения эффекта оптимального режима движения по траектории, названной нами при указанных выше условиях термотехноной.

2. Основная часть. Уравнения движения и их анализ

Также как и в предыдущих работах [10, 11], решение будем искать с помощью метода подвижного базиса. Геометрическую постановку задачи удобно проиллюстрировать с помощью рис. 1. Показанное на рисунке вращение, которое всегда имеет место при движении шарообразных тел, приводящее к необходимости учета эффекта Магнуса (как это было сделано, например, в работе [12]), в настоящем сообщении во внимание приниматься не будет, что формально связано с малой скоростью движения.

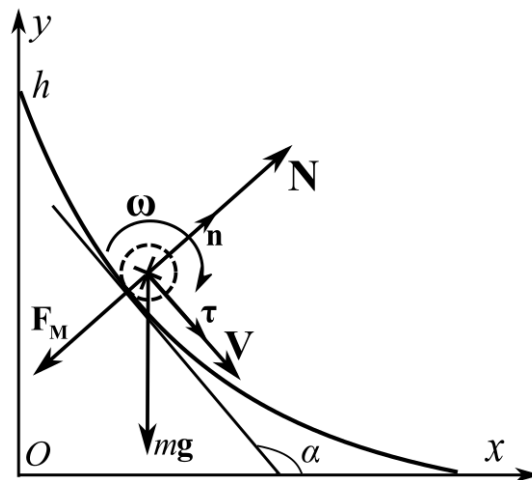


Рис. 1. Схематическая геометрия задачи: F_M – сила Магнуса, проявляющая себя при вращательном движении шарообразных тел

Как видно из рис. 1, единственным дополнительным вектором здесь является градиент температуры, направленный по единичной нормали $\mathbf{n}$ по-

движного базиса $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор, определяемый как $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{v}$, где $\mathbf{v}$ – скорость.

Чтобы учесть эффект теплового влияния на уравнение движения зоны контакта, воспользуемся методикой вывода всех известных нам уравнений с помощью закона сохранения полной мощности системы, который весьма подробно описан в работе [13] и многократно апробировался при решении ряда задач (см., к примеру работы [14, 15]).

Действительно, можно записать, что

$$\dot{E} + \dot{Q} = 0, \quad (1)$$

где энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} - m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}, \quad (2)$$

здесь m – масса тела; $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из начала координат в центр тяжести тела, а в формулу для $\dot{Q}$ входят все остальные физические эффекты.

В самом деле, для диссипативной функции мы имеем право записать, что

$$\dot{Q} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} + T\dot{S}, \quad (3)$$

где S – энтропия,

$$\mathbf{F}_{fr} = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v} - F_S \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (4)$$

μ – коэффициент сухого трения; $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$ – нормальная сила реакции желоба на тело; F_S – сила вязкого трения, например, это может быть сила Стокса, если тело представляет собой шар. В общем случае ее можно представить, как

$$\mathbf{F}_S = -k\mathbf{v}, \quad (5)$$

где k – коэффициент пропорциональности (в случае шара $k = 6\pi\eta R$, где η – динамическая вязкость, R – радиус шара).

Ниже будет рассмотрен частный случай, когда $k = 0$, т.е. вязкое сопротивление отсутствует.

Поскольку

$$T\dot{S} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \nabla T \cdot \mathbf{v} = k_B C_P (\nabla T \cdot \mathbf{v}), \quad (6)$$

где C_P – изобарическая теплоемкость, T – температура, k_B – постоянная Больцмана, то с учетом определений (2)–(4) получаем

$$\dot{E} + \dot{Q} = m\mathbf{v} \cdot \left(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{g} - \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{k_B C_P \nabla T}{m} \Big|_{\Sigma_V} \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{fr} + \mathbf{N} = N(-\mu\boldsymbol{\tau} + \mathbf{n}). \quad (8)$$

Последнее слагаемое в (7) берется на границе контакта тела с желобом.

Это означает, что при условии непрерывности градиента температуры на границе, если тепловой поток направлен от тела к желобу, под изобарической теплоемкостью следует понимать C_{1P} , которая характеризует теплоемкость тела, а если тепловой поток направлен от желоба к телу, то под обозначением C_P следует понимать теплоемкость желоба C_{2P} .

Поскольку разложение градиента по базису $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$ имеет вид

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial T}{\partial \tau} \boldsymbol{\tau}, \quad (9)$$

то после приравнивания к нулю выражения в круглых скобках в равенстве (7) с учетом (9) мы получаем в результате следующее уравнение движения с учетом теплового эффекта:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} + \frac{(-\mu\boldsymbol{\tau} + \mathbf{n})N}{m} + \frac{k_B C_P}{m} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial T}{\partial \tau} \boldsymbol{\tau} \right). \quad (10)$$

В случае криволинейного движения ускорение определяется как

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n} + \dot{v} \boldsymbol{\tau}, \quad (11)$$

а ускорение свободного падения раскладывается по базису $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$ согласно формуле

$$\mathbf{g} = g(\mathbf{n} \cos \alpha + \boldsymbol{\tau} \sin \alpha). \quad (12)$$

Следовательно согласно (10)–(12) мы приходим к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{N}{m} = v \dot{\alpha} - g \cos \alpha - \frac{k_B C_P}{m} \frac{\partial T}{\partial n}, \\ \dot{v} = g \sin \alpha - \mu \frac{N}{m} - \frac{k_B C_P}{m} \frac{\partial T}{\partial \tau}. \end{cases} \quad (13)$$

В нижнем уравнении системы (13) производную по направлению касательной $\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial l}$ можно положить равной нулю, поскольку наиболее эффективный поток тепла должен быть направлен только по нормали к поверхности контакта (его вычисление приводится немного ниже).

В этом случае система (13) несколько упрощается и становится такой:

$$\begin{cases} \frac{N}{m} = v \dot{\alpha} - g \cos \alpha - \frac{k_B C_P}{m} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma_V}, \\ \dot{v} = g \sin \alpha - \mu \frac{N}{m}, \end{cases} \quad (14)$$

где множитель $\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma_V}$ подчеркивает, что производная по нормали к траектории берется на границе контакта обоих тел.

Наша задача заключается теперь в вычислении этого множителя $\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma_V}$. Согласно поставленной выше задаче, если сухое трение отсутствует, то никакого потока тепла нет. Это означает, что интересующая нас производная по нормали должна быть связана только с силами сухого трения. Для того чтобы эту зависимость получить, удобно воспользоваться условием равенства диссипативных функций.

Действительно, с одной стороны, при учете сухого трения диссипативную функцию можно представить как

$$\dot{Q}_{fr} = -\mathbf{F}_{fr} \cdot \mathbf{v}. \quad (15)$$

С другой стороны (полагая везде далее постоянную Больцмана равной единице), можно представить эффективную диссипативную функцию согласно [12] в виде

$$\int_{\Delta V} T \dot{q} dV = \int_{\Delta V} \kappa (\nabla T)^2 dV, \quad (16)$$

где κ – коэффициент теплопроводности; $\dot{q}$ – диссипативная функция единицы объема, а объем ΔV представляет собой область, взятую по обе стороны границы в непосредственной близости к поверхности контактирующих тел.

Приравнявая (15) и (16), имеем с учетом (4):

$$\int_{\Delta V} \mu T \frac{N}{m} v \rho dV = \int_{\Delta V} \kappa (\nabla T)^2 dV,$$

где ρ – плотность одного из тел.

Поскольку $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$, где ΔV_1 – объем вблизи границы со стороны тела, а ΔV_2 – объем вблизи границы контакта со стороны желоба (причем считаем, что $\Delta V_1 = \Delta V_2$), то согласно этому равенству мы немедленно приходим к интересующему нас соотношению

$$\mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) \frac{N}{m_1} v = (\kappa_1 - \kappa_2) \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^2. \quad (17)$$

Здесь стоит заметить, что равенство (17) представлено нами в феноменологическом виде, который связан с необходимостью выполнения двух условий. *Первое условие:* если материалы тела и желоба одинаковые, то при

равенстве $\rho_1 = \rho_2$ должно также выполняться и равенство $\kappa_1 = \kappa_2$, но их температуры могут быть разными! При этом, как и должно быть, в равенстве (17) и слева и справа автоматически получаются нули. *Второе условие*: если температуры тела и желоба вблизи поверхности одинаковые, но материалы разные, то градиент температуры также должен быть равен нулю, т.е. мы приходим к тождеству: $0 = 0$. Оба эти условия и были нами учтены в уравнении (17).

Возвращаясь к верхнему уравнению в системе (14), после его подстановки в (17) приходим к квадратному уравнению для определения $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Sigma_V}$.

В самом деле, имеем в результате

$$(\kappa_1 - \kappa_2) \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^2 - \mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) v C_P \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) - \mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) v (v \dot{\alpha} - g \cos \alpha) = 0.$$

Откуда следует интересующая нас зависимость:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\mu v (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) C_P}{2(\kappa_1 - \kappa_2)} \pm \sqrt{\left[\frac{\mu v (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) C_P}{2(\kappa_1 - \kappa_2)} \right]^2 + \frac{\mu v (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) (v \dot{\alpha} - g \cos \alpha)}{\kappa_1 - \kappa_2}}. \quad (18)$$

Специфика брахистохроны (как это было показано, например, в работах [9, 10]) приводит к тому, что и при учете трения, и без его учета, в любом случае (но с точностью до μ^2 !) должно выполняться соотношение

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{C_1}, \quad (19)$$

где C_1 – константа.

Поэтому, если коэффициент трения мал, т.е. $\mu \ll 1$, согласно (18) мы имеем право приближенно записать, что

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Sigma_V} \approx v \sqrt{\frac{2\mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2)}{C_1 (\kappa_1 - \kappa_2)}}. \quad (20)$$

И, следовательно, нижнее динамическое уравнение в системе (14) с учетом верхнего уравнения, а также полученного соотношения (20), приводится к весьма компактному виду:

$$\dot{v} + \mu a v \dot{\alpha} = g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \quad (21)$$

где

$$a = 1 + \frac{C_P}{m} \sqrt{\frac{2\mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2)}{C_1 (\kappa_1 - \kappa_2)}}. \quad (22)$$

С учетом того, что $\dot{\alpha} \approx \frac{1}{C_1}$, уравнение (21) легко свести к следующему:

$$v' + \mu a v = C_1 g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \quad (23)$$

где «штрих» означает дифференцирование по α .

Решение уравнения (23) есть

$$v = A e^{-\mu a \alpha} + \frac{C_1 g}{1 + \mu^2 a^2} \left[\mu (a + 1) \sin \alpha - (1 - a^2 \mu^2) \cos \alpha \right].$$

Согласно начальному условию

$$v(\alpha_1) = 0 \quad (24)$$

имеем

$$A = -\frac{C_1 g}{1 + a^2 \mu^2} e^{\mu a \alpha_1} \left[\mu (a + 1) \sin \alpha_1 - (1 - a^2 \mu^2) \cos \alpha_1 \right].$$

И, таким образом, искомую зависимость скорости от угла α можно представить как

$$v = \frac{C_1 g}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \mu (a + 1) \sin \alpha - (1 - a^2 \mu^2) \cos \alpha + D e^{\mu a (\alpha_1 - \alpha)} \right\}, \quad (25)$$

где введено сокращенное обозначение

$$D = (1 - a^2 \mu^2) \cos \alpha_1 - \mu (a + 1) \sin \alpha_1.$$

Чтобы вычислить угол α_1 , нам следует воспользоваться еще одним начальным условием:

$$\ddot{y}(\alpha_1) = -g. \quad (26)$$

И поскольку $\dot{y} = -v \sin \alpha$, а $\ddot{y} = -\dot{v} \sin \alpha - v \dot{\alpha} \cos \alpha$, то в силу условия (24) имеем $g = \sin \alpha_1 \dot{v}|_{\alpha=\alpha_1}$.

Поэтому согласно решению (25) (ср. с (21)):

$$\dot{v}|_{\alpha=\alpha_1} = C_1 g \dot{\alpha} (\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1),$$

и с учетом (19) мы приходим к уравнению на угол α_1 :

$$g = g \sin \alpha_1 (\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1),$$

откуда немедленно получаем, что $|\operatorname{tg} \alpha_1| = 1/\mu$.

А потому, учитывая, что угол α тупой, имеем

$$\cos \alpha_1 = -\mu/\sqrt{1 + \mu^2}, \quad \sin \alpha_1 = 1/\sqrt{1 + \mu^2}. \quad (27)$$

Следовательно, интересующую нас форму желоба при условии $x > 0$, $y > 0$, несложно установить с помощью уравнений:

$$\dot{x} = -v \cos \alpha,$$

$$\dot{y} = -v \sin \alpha.$$

Интегрируя их, получаем

$$\begin{cases} x = - \int_{\alpha_1}^{\alpha} v \cos \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}, \\ y = H - \int_{\alpha_1}^{\alpha} v \sin \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}, \end{cases} \quad (28)$$

где H – высота скатывания.

С помощью найденного решения (25) из системы (28) с учетом того, что константа $C_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, имеем

$$\begin{cases} X = \frac{x}{H} = - \frac{2}{1 + \mu^2 a^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left\{ \mu(a+1) \sin \alpha - (1 - a\mu^2) \cos \alpha + D e^{\mu a(\alpha_1 - \alpha)} \right\} \cos \alpha d\alpha, \\ Y = \frac{y}{H} = 1 - \frac{2}{1 + \mu^2 a^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left\{ \mu(a+1) \sin \alpha - (1 - a\mu^2) \cos \alpha + D e^{\mu a(\alpha_1 - \alpha)} \right\} \sin \alpha d\alpha. \end{cases} \quad (29)$$

Несложное интегрирование позволяет получить следующий окончательный ответ:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \mu(a+1) (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_1) + \right. \\ \left. + (1 - a\mu^2) \left(\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \right) - \right. \\ \left. - 2D \left[(\sin \alpha - a\mu \cos \alpha) e^{a\mu(\alpha_1 - \alpha)} - (\sin \alpha_1 - a\mu \cos \alpha_1) \right] \right\}, \\ Y = 1 + \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \mu(a+1) \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \right) - \right. \\ \left. - (1 - a\mu^2) (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_1) - \right. \\ \left. - 2D \left[-(\cos \alpha + a\mu \sin \alpha) e^{a\mu(\alpha_1 - \alpha)} + \cos \alpha_1 + a\mu \sin \alpha_1 \right] \right\}. \end{cases} \quad (30)$$

Если теперь ввести очевидные константы в (30):

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ -\mu(a+1) \cos^2 \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 (1 - a\mu^2) + 2D (\sin \alpha_1 - a\mu \cos \alpha_1) \right\}, \\ R_2 &= \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \mu(a+1) + (1 - a\mu^2) \cos^2 \alpha_1 - 2D (\cos \alpha_1 + a\mu \sin \alpha_1) \right\}, \end{aligned}$$

то после их вычисления с учетом определений (25) и (27) получим

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{\mu \left[3 + 2a + \mu^2 + 2a^2 \mu^2 (1 - \mu^2) + 4a\mu^2 \right]}{(1 + \mu^2 a^2)(1 + \mu^2)}, \\ R_2 &= \frac{\mu^2 \left[a + 2a^2 (1 - \mu^2) - 4 + a\mu^2 \right]}{(1 + \mu^2 a^2)(1 + \mu^2)}. \end{aligned} \quad (31)$$

И, таким образом, решение (30) можно записать как

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \mu(a+1) \cos^2 \alpha + (1 - a\mu^2) \left(\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu(2 + a - a\mu^2)}{\sqrt{1 + \mu^2}} (\sin \alpha - a\mu \cos \alpha) e^{a\mu(\alpha_1 - \alpha)} \right\} - \\ &\quad - \frac{\mu \left[3 + 2a + \mu^2 + 2a^2 \mu^2 (1 - \mu^2) + 4a\mu^2 \right]}{(1 + \mu^2 a^2)(1 + \mu^2)}, \\ Y &= 1 + \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \mu(a+1) \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - (1 - a\mu^2) \cos^2 \alpha - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\mu(2 + a - a\mu^2)}{\sqrt{1 + \mu^2}} (\cos \alpha + a\mu \sin \alpha) e^{a\mu(\alpha_1 - \alpha)} \right\} + \\ &\quad + \frac{\mu^2 \left[a + 2a^2 (1 - \mu^2) - 4 + a\mu^2 \right]}{(1 + \mu^2 a^2)(1 + \mu^2)}. \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Фактически формулы (31), (32) отвечают на поставленный вопрос о форме желоба в условиях учета локального разогрева между ним и движущимся телом.

Подчеркнем, что все сказанное выше относится только к случаю, когда незначительное изменение температуры обусловлено силами сухого трения. Если изначально температура тела была T_1 , а температура желоба T_2 , то при этом условии полученные выше формулы становятся несправедливыми. Они верны лишь для относительно малых градиентов температуры.

3. Анализ формул (32)

Как легко понять, возможны только два случая, а именно градиент температуры либо маленький, либо большой. В самом деле, если согласно (22) ввести параметр

$$b = \frac{C_P}{m} \sqrt{\frac{2\mu(T_1 - T_2)(\rho_1 - \rho_2)}{C_1(\kappa_1 - \kappa_2)}}, \quad (33)$$

то сказанное означает следующее:

1. Если градиент температуры мал, т.е. $b \ll 1$, то $a \approx 1$, в этом случае формулы (32) переходят в следующие:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{1+\mu^2} \left\{ 2\mu \cos^2 \alpha + (1-\mu^2) \left(\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\mu(3-\mu^2)}{\sqrt{1+\mu^2}} (\sin \alpha - a\mu \cos \alpha) e^{\mu(\alpha_1 - \alpha)} \right\} - \frac{\mu(5+7\mu^2-2\mu^4)}{(1+\mu^2)^2}, \\ Y = 1 + \frac{1}{1+\mu^2} \left\{ 2\mu \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - (1-\mu^2) \cos^2 \alpha - \right. \\ \left. - \frac{2\mu(3-\mu^2)}{\sqrt{1+\mu^2}} (\cos \alpha + a\mu \sin \alpha) e^{\mu(\alpha_1 - \alpha)} \right\} - \frac{\mu^2}{(1+\mu^2)}, \end{cases} \quad (34)$$

которые качественно соответствуют решению, полученному в работе [13].

2. Если градиент температуры большой ($b \gg 1$ и $a \gg 1$), то здесь возможны две ситуации:

а) $1 \ll a \ll \frac{1}{\mu}$.

В этом случае согласно (32) имеем

$$\begin{cases} X = \alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{2a\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} (\sin \alpha - a\mu \cos \alpha) + a\mu \cos^2 \alpha - \frac{2a\mu}{(1+\mu^2)}, \\ Y = \sin^2 \alpha - \frac{2a\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} (\cos \alpha + a\mu \sin \alpha) + a\mu \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right). \end{cases} \quad (35)$$

И, как видим, решение (35) описывает чуть-чуть «подпорченную» брахистохрону.

б) $\frac{1}{\mu^2} \gg a \gg \frac{1}{\mu}$.

Из (32) следует тогда, что

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\mu^2 a^2} \left\{ a\mu \cos^2 \alpha + \left(\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right\} - \frac{2}{\mu a (1+\mu^2)}, \\ Y = 1 + \frac{1}{\mu^2 a^2} \left\{ a\mu \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - \cos^2 \alpha \right\} + \frac{2(1-\mu^2)}{a(1+\mu^2)}. \end{cases} \quad (36)$$

Если для примера принять следующие численные значения параметров:

$$c_{1P} \sim c_{2P} \sim 10^{20} \frac{1}{\Gamma}, \quad k_B = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{К}}, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \approx \frac{T_2 - T_1}{\delta}, \quad T_2 - T_1 = \Delta T \sim 10^{-6} \text{ К},$$

$$g \approx 10^3 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \delta \sim 10^{-6} \text{ см}, \quad \rho_2 \sim \rho_1, \quad \Delta V_2 = \Delta V_1,$$

то получим по порядку величины:

$$b = \frac{k_B c_{1P}}{g} \frac{\partial T}{\partial n} \sim \frac{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 10^{20} \cdot 10^{-6}}{10^3 \cdot 10^{-6}} \sim 10, \quad (37)$$

где c_{1P} – теплоемкость, отнесенная к единице массы.

Приведенная согласно (37) оценка позволяет сделать один очень важный вывод. Даже перегрев области контакта в одну миллионную градуса Кельвина (или Цельсия) приводит к весьма ощутимому изменению траектории, а именно более выгодным с энергетической точки зрения становится движение не по брахистохроне.

На рис. 2 показано качественное изменение траектории движения, обусловленное слабым перегревом зоны контакта, приводящим к неминуемой деформации формы желоба при выполнении условий Б).

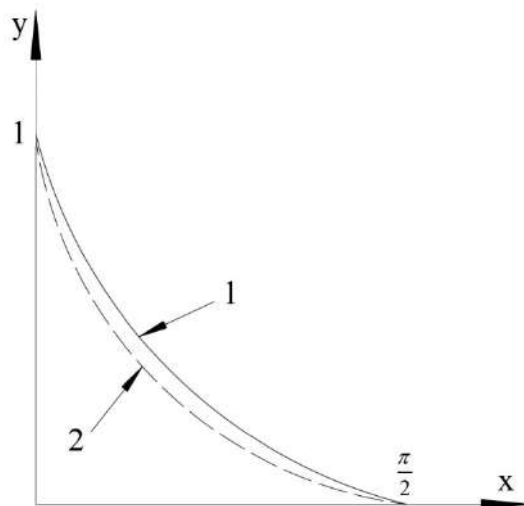


Рис. 2. Кривая 1 приближенно совпадает с брахистохроной в случае, если $p = 100$, для кривой 2 – $p = 70$

Как известно, время движения по классической брахистохроне (в отсутствие трения) определяется значением

$$t_B = \pi \sqrt{\frac{H}{2g}}. \quad (38)$$

Оценим время движения по линии, заданной уравнениями (32).

Действительно, согласно общему определению для времени скатывания имеем

$$\tilde{t} = \int_l \frac{dl}{v} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dl}{d\alpha} \frac{d\alpha}{v} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R \frac{d\alpha}{R\dot{\alpha}} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}. \quad (39)$$

При условии $\dot{\alpha} = \frac{1}{C_1}$ из (38) получаем

$$\tilde{t} = C_1 (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (40)$$

А так как $C_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, мы приходим к следующей общей формуле для вычисления времени скатывания:

$$\tilde{t} = \sqrt{\frac{2H}{g}} (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (41)$$

В случае классической брахистохроны, когда $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, получаем формулу (38).

Если же у нас траектория задается уравнениями (32), то для нее начальный угол определяется формулами (27), а конечный угол α_2 должен определяться согласно уравнениям (29) с помощью следующих интегральных условий, учитывающих фиксированность нижней граничной точки:

$$\begin{cases} -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v \cos \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} = -C_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v \cos \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2} H, \\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v \sin \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} = C_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v \sin \alpha d\alpha = H, \end{cases} \quad (42)$$

где скорость v дается решением (25).

Сказанное означает, что параметр b согласно определению (33) формально можно считать параметром переключения, если придерживаться общих принципов теории оптимального управления [16].

Заключение

В заключение работы, отметим:

- 1) получена система уравнений, описывающая изменение траектории движения при учете эффекта разогрева зоны контакта;
- 2) проанализировано решение этой системы уравнений и показано, что в зависимости от параметра b (или a) форма линии будет сильно изменяться;
- 3) приведена численная оценка для управляющего параметра b .

Список литературы

1. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.
2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М. : Мир, 1974. 488 с.

3. Гладков С. О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. С. 164002-1–164002-5.
4. Lipp S. C. Brachistochrone with Coulomb friction // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, № 2. P. 562–584.
5. Hayen J. C. Brachistochrone with Coulomb friction // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2005. Vol. 40, № 8. P. 1057–1075.
6. Гладков С. О., Богданова С. Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. С. 171101-1–171101-5.
7. Ashby N., Brittin W. E., Love W. F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction // American Journal of Physics. 1975. Vol. 43. P. 902–905.
8. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М. : Физматгиз, 1961. 284 с.
9. Гладков С. О., Богданова С. Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. С. 161101-1–161101-5.
10. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245, № 4. P. 528–537.
11. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 257, № 1. P. 27–30.
12. Гладков С. О., Богданова С. Б. О влиянии на форму брахистохроны эффекта Магнуса // Вестник Томского государственного университета. 2023. № 84. С. 33–39.
13. Гладков С. О. Об одном методическом подходе при выводе основных физических уравнений // Физическое образование в вузах. 2021. Т. 27, № 2. С. 5–11.
14. Гладков С. О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // Журнал технической физики. 2018. Т. 88, № 3. С. 337–341.
15. Гладков С. О. К вопросу о самоорганизации процессов изменения численности населения Земли // Биофизика. 2021. Т. 66, № 5. С. 1005–1014.
16. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М. : Наука, 1969. 408 с.

References

1. Elsgolts L.E. *Differentsialnyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye = Differential equations and calculus of variations*. Moscow: Nauka, 1969:424. (In Russ.)
2. Yang L. *Lektsii po variatsionnomu ischisleniyu i teorii optimalnogo upravleniya = Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*. Moscow: Mir, 1974:488. (In Russ.)
3. Gladkov S.O. On the trajectory of a body entering a liquid at an arbitrary angle. *Uchenyye zapiski fizicheskogo fakulteta MGU = Proceedings of the faculty of physics of MSU*. 2016;(4):164002-1–164002-5. (In Russ.)
4. Lipp S.C. Brachistochrone with Coulomb friction. *SIAM J. Control Optim.* 1997;35(2):562–584.
5. Hayen J.C. Brachistochrone with Coulomb friction. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2005;40(8):1057–1075.
6. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. General dynamic equations of plane axial motion of a material body along a duct taking into account the strength of the friction (their numerical analysis in some frequent cases). *Uchenyye zapiski fizicheskogo fakulteta MGU = Proceedings of the faculty of physics of MSU*. 2017;(1):171101-1–171101-5. (In Russ.)

7. Ashby N., Brittin W.E., Love W.F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction. *Am. J. Phys.* 1975;43:902–905.
8. Gelfad I.M., Fomin S.V. *Variatsionnoye ischisleniye = Calculus of variations*. Moscow: Fizmatgiz, 1961:284. (In Russ.)
9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Geometric phase transition in the brachistochrone problem. *Uchenyye zapiski fizicheskogo fakulteta MGU = Proceedings of the faculty of physics of MSU*. 2016;(1):161101-1–1611015. (In Russ.)
10. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020;245(4):528–537.
11. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021;257(1):27–30. (In Russ.)
12. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On the influence of the Magnus effect on the shape of the brachistochrone. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Tomsk State University*. 2023;(84):33–39. (In Russ.)
13. Gladkov S.O. On one methodical approach to deriving basic physical equations. *Fizicheskoye obrazovaniye v vuzakh = Physics education in universities*. 2021;27(2):5–11. (In Russ.)
14. Gladkov S.O. To the question of calculating the time of stopping the internal organs in the vertical continuum of the tibial body and the time of movement of the external tibial organ aligned with it. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki = Journal of Technical Physics*. 2018;88(3):337–341. (In Russ.)
15. Gladkov S.O. On the issue of self-organization of processes of change in the population of the Earth. *Biofizika = Biophysics*. 2021;66(5):1005–1014. (In Russ.)
16. Boltyanskiy V.G. *Matematicheskiye metody optimalnogo upravleniya = Mathematical methods of optimal control*. Moscow: Nauka, 1969:408. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Октябринович Гладков

доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры № 311
«Прикладные программные средства
и математические методы», Московский
авиационный институт (национальный
исследовательский университет)
(Россия, г. Москва, Волоколамское
шоссе, 4)

E-mail: sglad51@mail.ru

Sergey O. Gladkov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, professor of the
sub-department No.311 of applied software
and mathematical methods, Moscow
Aviation Institute (National Research
University) (4 Volokolamskoye highway,
Moscow, Russia)

Софья Борисовна Богданова

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры № 311
«Прикладные программные средства
и математические методы», Московский
авиационный институт (национальный
исследовательский университет)
(Россия, г. Москва, Волоколамское
шоссе, 4)

E-mail: sonjaf@list.ru

Sofya B. Bogdanova

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department No.311
of applied software and mathematical
methods, Moscow Aviation Institute
(National Research University)
(4 Volokolamskoye highway,
Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 26.02.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.03.2025

Принята к публикации / Accepted 22.04.2025

УДК 517.925

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-4

О бифуркациях периодической траектории, касающейся линий переключения в двух точках

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия

vroitenberg@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Динамические системы, задаваемые разрывными кусочно-гладкими векторными полями на плоскости, являются естественными математическими моделями релейных систем теории автоматического управления. Периодические траектории описывают автоколебания. Хотя исследованию рождения периодических траекторий посвящено значительное число работ, описание типичных бифуркаций далеко от завершения. Целью настоящей работы является изучение бифуркаций периодических траекторий, аналогичных бифуркациям двойного и тройного циклов гладкой динамической системы. *Материалы и методы.* Применяются метод точечных отображений и другие методы качественной теории дифференциальных уравнений. *Результаты.* Рассматривается типичное двухпараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей на плоскости. Предполагается, что при нулевых значениях параметров поле имеет периодическую траекторию Γ , касающуюся линий переключения в двух особых точках типа «развилка» и не содержащую других особых точек. При этом обе компоненты, на которые Γ разбивает плоскость, пересекаются с сепаратрисами развилки, не содержащимися в Γ . Рассматриваются три случая. В первом случае Γ устойчива и бифурцирует аналогично тройному циклу, во втором случае Γ устойчива, но ее бифуркации состоят только в изменении числа участков скользящих движений на ней, а в третьем случае Γ полуустойчива и бифурцирует аналогично двойному циклу. *Выводы.* Указано несколько возможных сценариев рождения и перерождения периодических траекторий кусочно-гладкой динамической системы при изменении ее параметров.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле на плоскости, особая точка, периодическая траектория, бифуркация

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях периодической траектории, касающейся линий переключения в двух точках // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 45–57. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-4

On bifurcations of a periodic orbit tangent to switching lines at two points

V.Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

vroitenberg@mail.ru

Abstract. *Background.* Dynamic systems defined by discontinuous piecewise smooth vector fields on a plane are natural mathematical models of relay systems in automatic control theory. Periodic trajectories describe self-oscillations. Although a significant number of works have been devoted to the study of the birth of periodic trajectories, the description of

typical bifurcations is far from complete. The purpose of this research is to study bifurcations of periodic trajectories similar to bifurcations of double and triple cycles of a smooth dynamic system. *Materials and methods.* The method of point mappings and other methods of the qualitative theory of differential equations are applied. *Results.* A generic two-parameter family of piecewise smooth vector fields on a plane is considered. It is assumed that for zero values of the parameters the field has a periodic trajectory Γ touching the switching lines at two singular points of the fork type and not containing other singular points. In this case, both components into which Γ divides the plane intersect with the separatrices of the forks that are not contained in Γ . Three cases are considered. In the first case, Γ is stable and bifurcates similarly to a triple cycle, in the second case, Γ is stable, but its bifurcations consist only in changing the number of sections of sliding motions on it, and in the third case, Γ is semistable and bifurcates similarly to a double cycle. *Conclusions.* Several possible scenarios for the birth and rebirth of periodic trajectories of a piecewise smooth dynamic system when its parameters change are indicated.

Keywords: piecewise smooth planar vector field, singular point, periodic trajectory, bifurcation

For citation: Roitenberg V.Sh. On bifurcations of a periodic orbit tangent to switching lines at two points. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):45–57. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-4

Введение

Исследования бифуркаций кусочно-гладких динамических систем на плоскости ведутся уже давно [1, 2]. Бифуркации рождения периодической траектории из особой точки и другие локальные бифуркации в типичных семействах кусочно-гладких систем на плоскости с одним и двумя параметрами изучались в работах [2–9]. Бифуркации сепаратрисных контуров и периодических траекторий рассматривались в [3–5, 10, 11]. Тем не менее до сих пор не исследованы некоторые нетривиальные бифуркации в типичных двухпараметрических семействах.

В данной работе описываются бифуркации в окрестности периодической траектории, касающейся линий переключения в двух особых точках типа «развилка».

1. Предварительные сведения

Пусть $\bigcup_{k=1}^m M_k = \mathbf{R}^2$, где множества M_k имеют границу ∂M_k , являющуюся вложенным одномерным C^∞ -подмногообразием $\mathbf{R}^2$, а $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$, если $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$. Обозначим $D := \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$. Множества $M_{ij} := M_i \cap M_j \neq \emptyset$ – C^∞ -гладкие одномерные подмногообразия $\mathbf{R}^2$.

Кусочно-гладким векторным полем класса C^1 на плоскости $\mathbf{R}^2$ с разбиением D , назовем такое векторное поле $X: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, что для любого $k \in \{1, \dots, m\}$ существует единственное C^1 -векторное поле X^k на M_k , для которого $X^k|_{\text{int } M_k} = X|_{\text{int } M_k}$. Обозначим множество таких полей – $\mathfrak{X}^1(\mathbf{R}^2, D)$. Траектории поля X определим по *принципу выпуклого доопределения* на ли-

ниях M_{ij} [2, с. 40, с. 95]. Если в выпуклой оболочке векторов $X^i(x)$ и $X^j(x)$, $x \in M_{ij}$, имеется вектор, касательный к M_{ij} , то обозначим его $X^{i,j}(x)$.

Особые точки векторных полей X^k , точки касания этих полей с ∂M_k и точки $x \in M_{ij}$, в которых $X^{i,j}(x) = 0$, будем называть *особыми точками* поля X .

Пусть в особой точке $O \in M_{ij}$ вектор $X^i(O)$ касается M_{ij} . Выберем C^∞ -координаты x_1, x_2 в окрестности $U(O)$ точки O так, чтобы эта точка имела координаты $x_1 = x_2 = 0$, а $M_i \cap U(O)$ ($M_j \cap U(O)$) задавалось условием $x_2 \geq 0$ ($x_2 \leq 0$). В этих координатах $X^i(x) = (P_1^+(x_1, x_2), P_2^+(x_1, x_2))$, $X^j(x) = (P_1^-(x_1, x_2), P_2^-(x_1, x_2))$, где $P_s^\pm \in C^1$ ($s = 1, 2$), $P_2^\pm(0, 0) = 0$. Особая точка O – *сходящаяся (расходящаяся) развилка*, если $P_1^+(0, 0) \frac{\partial P_2^+(0, 0)}{\partial x_1} > 0$, а $P_2^-(0, 0) > 0$ ($P_2^-(0, 0) > 0$) (рис. 1).

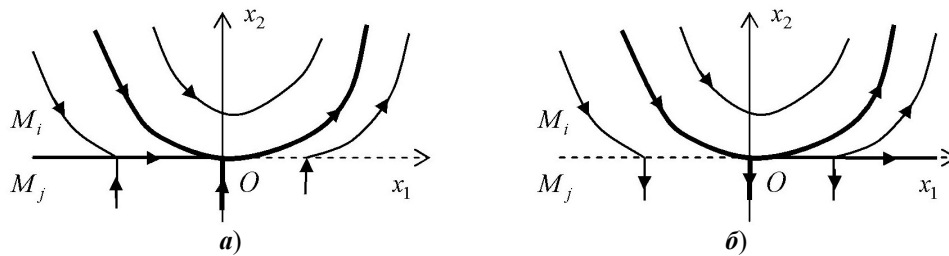


Рис. 1. Сходящаяся развилка (а); расходящаяся развилка (б)

В сходящейся (расходящейся) развилке O начинается отрицательная (положительная) полутраектория, не касающаяся M_{ij} в точке O – *трансверсальная сепаратриса* развилки O . Положительную и отрицательную полутраектории, начинающиеся в точке O и касающейся M_{ij} в O , назовем *выходящей и входящей касательной сепаратрисами* развилки.

2. Формулировка условий

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon \in \mathcal{X}^1(\mathbf{R}^2, D)$, зависящих от параметров $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbf{R}^2$ так, что отображение $(x, \varepsilon) \mapsto X_\varepsilon(x)$ принадлежит классу C^1 . Будем предполагать выполнение сформулированных ниже условий I–V.

I. Векторное поле X_0 имеет периодическую траекторию Γ_0 , проходящую через две развилки O_1^0 и O_2^0 , не содержащую других особых точек и содержащую касательные сепаратрисы этих развилки.

Множество $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_0$ состоит из двух связных компонент C_1 и C_2 .

II. Компонента C_1 (соотв. C_2) не пересекается с трансверсальной сепаратрисой развилки O_1^0 (соотв. O_2^0).

Условие **III** сформулируем в двух вариантах:

IIIa. Обе точки O_1^0 и O_2^0 – сходящиеся развилки.

IIIб. Точка O_1^0 – сходящаяся развилка, точка O_2^0 – расходящаяся развилка.

Вариант расходящихся развилки O_1^0 и O_2^0 сводится к **IIIa** переходом к семейству противоположных векторных полей $-X_\varepsilon$.

Будем считать, что развилка $O_k^0 \in M_{i_k j_k}$, а ее касательные сепаратрисы начинаются в M_{i_k} , $k=1,2$. Выберем C^1 -отображения $T_k : (-1,1) \rightarrow \text{int } M_{i_k}$ ($k=1,2$), трансверсальные траекториям поля X^{i_1} , такие, что $\forall s \in (-1,1)$ векторы $T'_k(s)$ и $X^{i_1}(T_k(s))$ линейно независимы, точка $T_1(0)$ ($T_2(0)$) принадлежит входящей (выходящей) касательной сепаратрисе точки O_1^0 , а $T_k(0,1) \in C_1$.

Выбрав достаточно малую окрестность нуля $E^1 \subset \mathbf{R}^2$, будем иметь для поля X_ε , $\varepsilon \in E^1$, развилки $O_k(\varepsilon) \in M_{i_k j_k}$, $k=1,2$, такие, что $O_k(\cdot) \in C^1$, $O_k(0) = O_k^0$, при этом входящая (выходящая) касательная сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ пересекает трансверсаль $T_1(-1,1)$ ($T_2(-1,1)$) в точке $T_1(s_{11}(\varepsilon))$ ($T_2(s_{12}(\varepsilon))$), выходящая (входящая) касательная сепаратриса развилки $O_2(\varepsilon)$ пересекает трансверсаль $T_1(-1,1)$ ($T_2(-1,1)$) в точке $T_1(s_{21}(\varepsilon))$ ($T_2(s_{22}(\varepsilon))$), где $s_{kl}(\cdot) \in C^1$, $s_{kl}(0) = 0$ ($k, l=1,2$).

Считая окрестность E^1 достаточно малой, можно выбрать такие C^1 -вложения $T_k^\varepsilon : (-1,1) \rightarrow M_{i_k j_k}$ ($\varepsilon \in E^1$, $k=1,2$), что $T_k^\varepsilon(v)$ C^1 -гладко зависит от (v, ε) , $T_k^\varepsilon(0) = O_k(\varepsilon)$, а $T_1^\varepsilon(-1,0)$ и $T_2^\varepsilon(0,1)$ – устойчивые линейные особенности поля X_ε .

Обозначим $s_k(\varepsilon) := s_{2k}(\varepsilon) - s_{1k}(\varepsilon)$ и введем условие

IV. $\det(\partial s_k(0) / \partial \varepsilon_i) \neq 0$.

Оно не зависит от произвола в выборе отображений T_1 и T_2 . Сделав в окрестности нуля $E_* \subset E^1$ замену $\tilde{\varepsilon}_1 = s_1(\varepsilon)$, $\tilde{\varepsilon}_2 = s_2(\varepsilon)$ и вернувшись к прежним обозначениям параметров, можно считать, что при всех $\varepsilon \in E_* = (-\delta_*, \delta_*)^2$:

$$s_{2k}(\varepsilon) - s_{1k}(\varepsilon) = \varepsilon_k \text{ для } k=1,2. \quad (1)$$

Из теорем о функциях соответствия по траекториям между дугами без контакта [12] и (1) следует, что для достаточно малых $u_0 > 0$ и $0 < \delta_0 < \min\{u_0, \delta_*\}$ определены отображения по траекториям поля X_ε , $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2$:

$$T_1(s_{11}(\varepsilon) + u) \mapsto T_1^\varepsilon(\varphi_1(u, \varepsilon)), \quad u \in (-u_0, 0),$$

$$T_2(s_{12}(\varepsilon) + u) \mapsto T_2^\varepsilon(\varphi_2(u, \varepsilon)), \quad u \in (\varepsilon_2, u_0),$$

$$T_1(s_{11}(\varepsilon) + u) \mapsto T_2(s_{12}(\varepsilon) + f_1(u, \varepsilon)), \quad u \in [0, u_0),$$

$$T_2(s_{12}(\varepsilon) + u) \mapsto T_1(s_{11}(\varepsilon) + f_2(u, \varepsilon)), \quad u \in (-u_0, \varepsilon_2],$$

такие, что $\varphi_k \in C^1$, $(\varphi_k)'_u(u, \varepsilon) > 0$, $k = 1, 2$, $\varphi_1(-0, \varepsilon) \equiv 0$, $\varphi_2(\varepsilon_2 + 0, \varepsilon) \equiv 0$,

$$f_k \in C^1, (f_k)'_u(u, \varepsilon) > 0, \quad k = 1, 2, \quad f_1(0, \varepsilon) \equiv 0, \quad f_2(\varepsilon_2, \varepsilon) \equiv \varepsilon_1. \quad (2)$$

Число $\lambda := (f_1)'_u(0, 0)(f_2)'_u(0, 0)$ не зависит от выбора T_1 и T_2 . Сформулируем теперь условие

V. $\lambda \neq 1$.

3. Бифуркации в окрестности Γ_0

Теорема. Пусть выполняются условия I–V. Тогда существует цилиндрическая окрестность U периодической траектории Γ_0 , ограниченная простыми замкнутыми кривыми Γ_- и Γ_+ , число $\delta > 0$ и разбиение области параметров $E = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \delta^2\}$ на множества $B_0 = \{(0, 0)\}$, B_i , E_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ (рис. 2):

$$B_2 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1), \varepsilon_1 \in (0, \delta)\}, \quad B_3 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 = \beta_3(\varepsilon_2), \varepsilon_2 \in (0, \delta)\},$$

$$\beta_j(\cdot) \in C^1, \quad \beta_j(+0) = 0, \quad \beta'_j(+0) > 0, \quad j = 2, 3, \quad \beta'_2(+0)\beta'_3(+0) < 1,$$

$$B_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_1^k, \quad B_1^k = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_2 = \beta_1^k(\varepsilon_1), \varepsilon_1 \in (0, \delta)\},$$

$$\beta_1^1(\varepsilon_1) \equiv 0, \quad \beta_1^k(\cdot) \in C^1, \quad \beta_1^k(\varepsilon_1) \uparrow \beta_2(\varepsilon_1),$$

$$B_4 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_4^k, \quad B_4^k = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 = \beta_4^k(\varepsilon_2), \varepsilon_2 \in (0, \delta)\},$$

$$\beta_4^1(\varepsilon_2) \equiv 0, \quad \beta_4^k(\cdot) \in C^1, \quad \beta_4^k(\varepsilon_2) \uparrow \beta_3(\varepsilon_2),$$

$$B_5 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 = 0\}, \quad B_6 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 < 0\},$$

$$E_2 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_2 > \beta_2(\varepsilon_1) \wedge \varepsilon_1 > \beta_3(\varepsilon_2)\}, \quad E_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_1^k, \quad E_3 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_3^k,$$

$$E_1^k = \{\varepsilon \in E : \beta_1^k(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_1^{k+1}(\varepsilon_1)\}, \quad E_3^k = \{\varepsilon \in E : \beta_4^k(\varepsilon_2) < \varepsilon_1 < \beta_4^{k+1}(\varepsilon_2)\},$$

$$E_4 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0\}, \quad E_5 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 < 0\},$$

$$E_6 = \{\varepsilon \in E : \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 < 0\}.$$

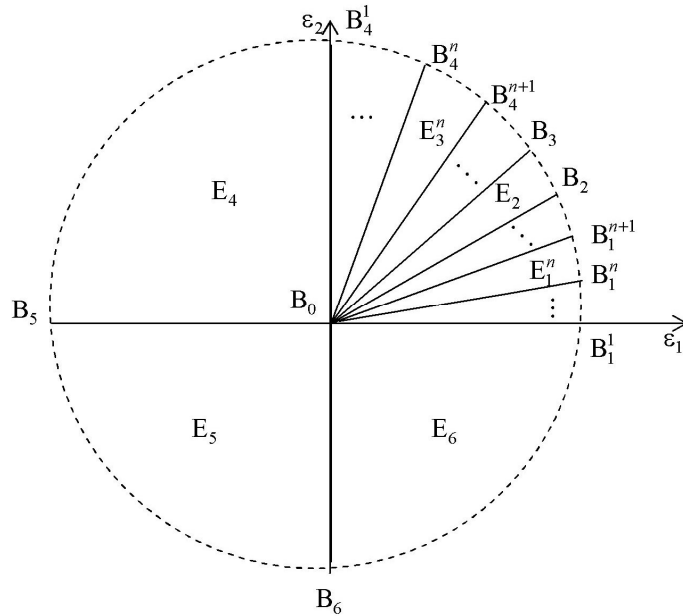


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма

1. В случае, когда условие III имеет вид IIIа, а $\lambda > 1$ (соотв. $\lambda < 1$), в точках Γ_- и Γ_+ траектории векторных полей X_ε , $\varepsilon \in E$, входят в U , а их фазовые портреты в U имеют вид, изображенный на рис. 3 (соотв. на рис. 4).

2. В случае, когда условие III имеет вид IIIб, а $\lambda > 1$, в точках Γ_- (Γ_+) траектории векторных полей X_ε , $\varepsilon \in E$, входят в U (выходят из U), а их фазовые портреты в U имеют вид, изображенный на рис. 5.

Случай, когда условие III имеет вид IIIб, а $\lambda < 1$, сводится к случаю 2 переходом к семейству противоположных векторных полей $-X_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$.

Доказательство. Ограничимся случаем 1, $\lambda > 1$. В случаях 1 (для $\lambda < 1$) и 2 доказательство аналогично.

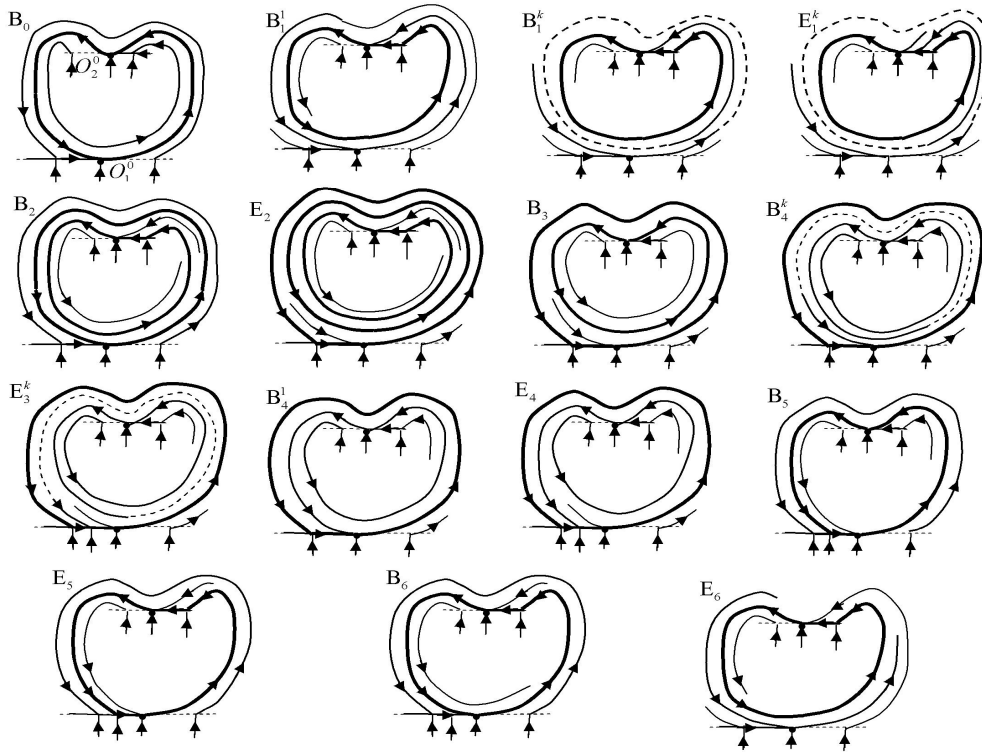
Функции f_k ($k=1,2$) можно продолжить до C^1 -функций $\bar{f}_k : (-u_0, u_0) \times (-\delta_0, \delta_0)^2 \rightarrow \mathbf{R}$. При достаточно малых $u_1 \in (0, u_0)$ и $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ определена функция $\bar{f}(u, \varepsilon) := \bar{f}_2(\bar{f}_1(u, \varepsilon), \varepsilon)$, $(u, \varepsilon) \in (-u_1, u_1) \times (-\delta_1, \delta_1)^2$. Так как $\bar{f}'_u(0, 0) = \lambda > 1$, то можно считать

$$\bar{f}'_u(u, \varepsilon) > 1 \text{ для всех } (u, \varepsilon) \in (-u_1, u_1) \times (-\delta_1, \delta_1)^2. \quad (3)$$

Из (2) следует, что

$$(f_1)'_{\varepsilon_1}(0, 0) = (f_1)'_{\varepsilon_2}(0, 0) = 0,$$

$$\bar{f}'_{\varepsilon_1}(0, 0) = (\bar{f}_2)'_{\varepsilon_1}(0, 0) = 1, \quad \bar{f}'_{\varepsilon_2}(0, 0) = (\bar{f}_2)'_{\varepsilon_2}(0, 0) = -(f_2)'_u(0, 0) < 0. \quad (4)$$


 Рис. 3. Бифуркации в случае 1, $\lambda > 1$

Поэтому можно считать u_1 и δ_1 выбранными так, что

$$|(f_1)'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon)| < 1/2 \text{ для всех } (u, \varepsilon) \in [0, u_1] \times (-\delta_1, \delta_1)^2, \quad (5)$$

$$\bar{f}'_{\varepsilon_1}(u, \varepsilon) > 0, \quad \bar{f}'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) < 0 \text{ для всех } (u, \varepsilon) \in (-u_1, u_1) \times (-\delta_1, \delta_1)^2. \quad (6)$$

Вследствие (4) и теоремы о неявной функции найдутся такие числа $0 < \delta_3 \leq \delta_2 \leq \delta_1$, что $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta_3, \delta_3)$ уравнение $\bar{f}_2(0, \varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1) \in (-\delta_2, \delta_2)$, где $\beta_2(\cdot) \in C^1$,

$$\beta_2(\varepsilon_1) = (1/(f_2)'_u(0, 0))\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \quad (7)$$

и потому можно считать $\beta_2(\varepsilon_1) > 0$ при $\varepsilon_1 \in (0, \delta_3)$, $\beta_2'(\varepsilon_1) > 0$ при $\varepsilon_1 \in [0, \delta_3)$,

$$\operatorname{sgn} f_2(0, \varepsilon) = -\operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_2(\varepsilon_1)) \text{ для всех } \varepsilon \in (0, \delta_3) \times [0, \delta_2). \quad (8)$$

Пусть $S(\varepsilon) := \bar{f}_1(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2$. Из (2) получаем $S'_{\varepsilon_1}(0) = (\bar{f}_1)'_u(0, 0) > 0$, $S'_{\varepsilon_2}(0) = -1$. Поэтому можно считать, что δ_2 и δ_3 выбраны так, что $\forall \varepsilon_2 \in (-\delta_3, \delta_3)$ уравнение $S(\varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_1 = \beta_3(\varepsilon_2)$, где $\beta_3(\cdot) \in C^1$,

$$\beta_3(\varepsilon_2) = (1/(f_1)'_u(0, 0))\varepsilon_2 + o(\varepsilon_2). \quad (9)$$

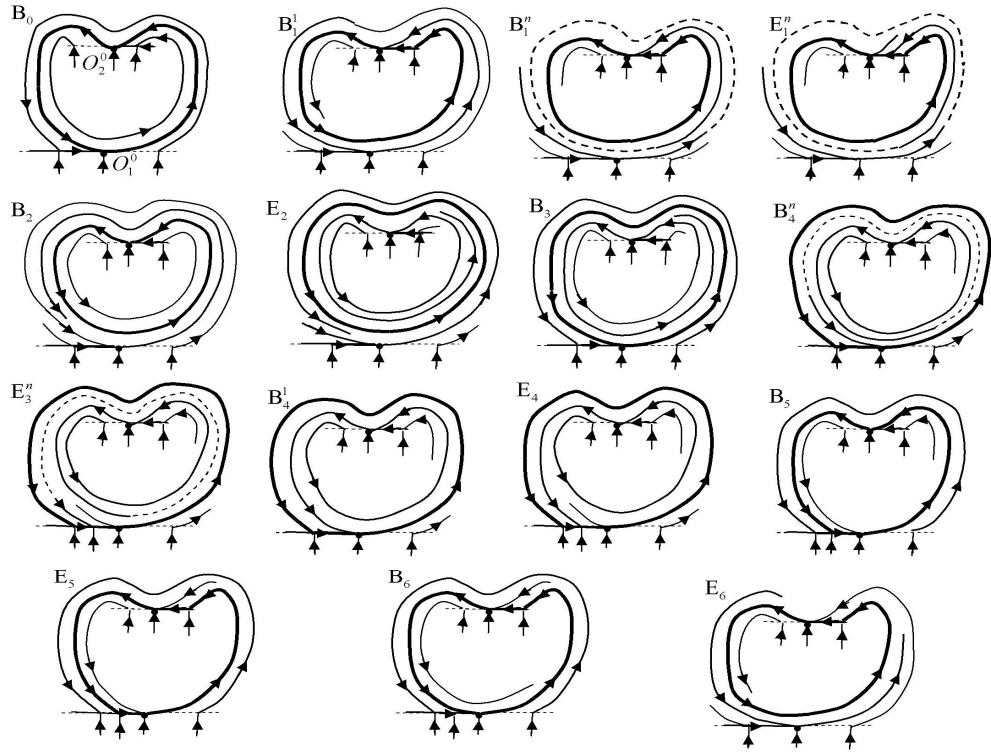


Рис. 4. Бифуркации в случае 1 $\lambda < 1$

Следовательно, можно считать $\beta_3(\varepsilon_2) > 0$ при $\varepsilon_2 \in (0, \delta_3)$, $\beta_3'(\varepsilon_2) > 0$ при $\varepsilon_2 \in [0, \delta_3)$,

$$\operatorname{sgn}(f_1(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_1 - \beta_3(\varepsilon_2)) \text{ для всех } \varepsilon \in [0, \delta_2) \times (0, \delta_3). \quad (10)$$

Так как $\lambda = (f_1)'_u(0, 0)(f_2)'_u(0, 0) > 1$, то из (7) и (9) следует, что $\delta_4 \in (0, \delta_3)$ можно выбрать так:

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_4) \quad \beta_2(\varepsilon_1) < \beta_3^{-1}(\varepsilon_1). \quad (11)$$

Функция последования $f(\cdot, \varepsilon) := f_2(f_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ в точках ее области определения совпадает с $\bar{f}(\cdot, \varepsilon)$. Ввиду (2) при $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (-\delta_4, 0)$ $f(\cdot, \varepsilon)$ не определена, при $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times \{0\}$ она определена в единственной точке $u = 0$. Считая δ_4 достаточно малым, имеем при $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (0, \delta_4)$ $f_1(u_1, \varepsilon) > f_1(u_1, 0)/2 > \delta_4 > \varepsilon_2$, $f_1(0, \varepsilon) = 0 < \varepsilon_2$. Отсюда и из неравенства $(f_1)'_u(u, \varepsilon) > 0$ следует, что для каждого $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (0, \delta_4)$ существует такое $u_0(\varepsilon) \in (0, u_1)$, что

$$\operatorname{sgn}(f_1(u, \varepsilon) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(u - u_0(\varepsilon)) \quad (12)$$

для всех $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (0, \delta_4)$, $u \in [0, u_1]$.

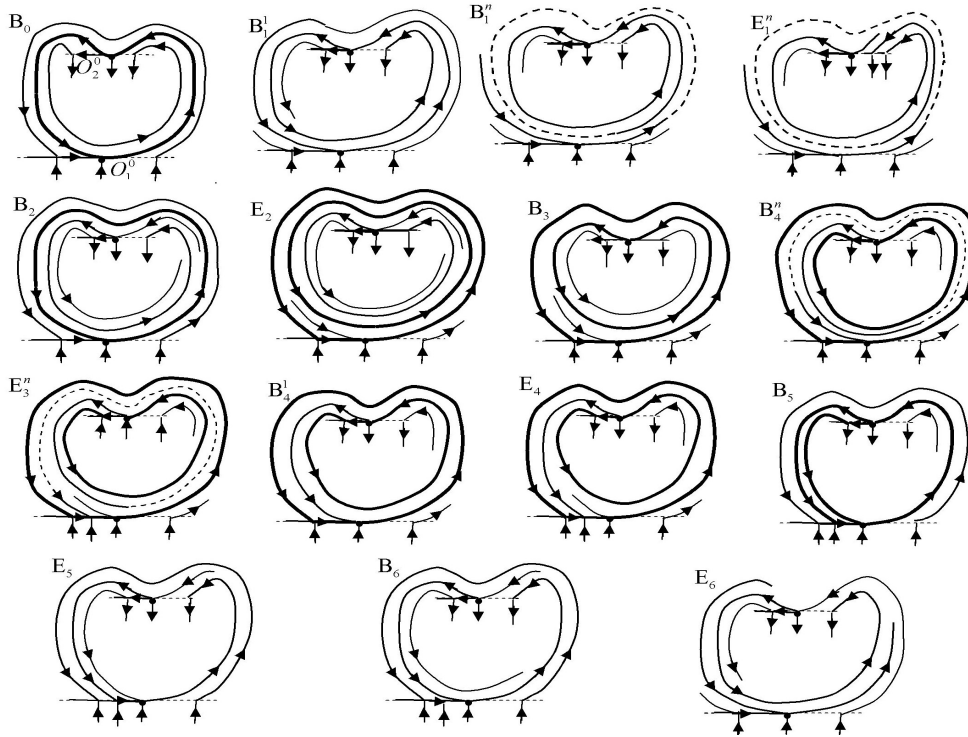


Рис. 5. Бифуркации в случае 2

Из (2), (10) и (12) следует, что при $\varepsilon \in (-\delta_4, \delta_4) \times (0, \delta_4)$ $f(\cdot, \varepsilon)$ определена на $[0, u_0(\varepsilon)]$, причем $u_0(\varepsilon) = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 = \beta_3(\varepsilon_2)$ и $u_0(\varepsilon) < \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 > \beta_3(\varepsilon_2)$.

Используя леммы из [12, параграф 3] можно построить окрестность U траектории Γ_0 и выбрать число $\delta \in (0, \delta_4)$ такое, что граница U состоит из простых замкнутых кривых Γ_- и Γ_+ , пересекающихся с дугой $T_k(-1, 1)$, $k=1, 2$, в единственной точке $T_k(s_{1k}(\varepsilon) + u_1^-(\varepsilon))$ и $T_k(s_{1k}(\varepsilon) + u_1^+(\varepsilon))$, где $-u_1 < u_k^-(\varepsilon) < 0 < u_k^+(\varepsilon) < u_1$, траектории полей X_ε , $\varepsilon \in E = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < \delta^2\}$ в точках Γ_- и Γ_+ входят в U , в U нет особых точек X_ε , кроме $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$. Тогда каждая траектория поля X_ε , начинающаяся в U , пересекает дугу $T_1(s_{11}(\varepsilon) + u_1^-(\varepsilon), s_{11}(\varepsilon) + u_1^+(\varepsilon))$.

Пусть $\varepsilon \in E$, $\varepsilon_1 > 0$, $0 \leq \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$. Из (2) и (8) имеем $f(0, \varepsilon) > 0$; откуда и из (3) получаем $\forall u \in [0, u_0(\varepsilon)]$ $f(u, \varepsilon) > u$. Положим для $u \in [0, u_0(\varepsilon)]$ $f^1(u, \varepsilon) := f(u, \varepsilon)$ и $f^n(u, \varepsilon) := f(f^{n-1}(u, \varepsilon), \varepsilon)$, если значение $f^{n-1}(u, \varepsilon)$ определено и $f^{n-1}(u, \varepsilon) \in [0, u_0(\varepsilon)]$.

Лемма 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует C^1 -функция $\beta_1^n(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$, такая, что $f^n(0, \varepsilon) = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_2 = \beta_1^n(\varepsilon_1)$, $0 < f^n(0, \varepsilon) < \varepsilon_1$ при $\beta_1^n(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$, $\beta_1^1(\varepsilon_1) \equiv 0$,

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta) \text{ и } n > 1 \quad \beta_1^{n-1}(\varepsilon_1) < \beta_1^n(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1), \quad (13)$$

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_1^n(\varepsilon_1) = \beta_2(\varepsilon_1). \quad (14)$$

Доказательство. Из (2), (8) и (6) получаем, что при $\varepsilon_2 = \beta_1^1(\varepsilon_1) \equiv 0$ $f^1(0, \varepsilon) = f_2(0, \varepsilon) = \varepsilon_1$, при $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$ $f^1(0, \varepsilon) = 0$, при $\beta_1^1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$ $0 < f^1(0, \varepsilon) < \varepsilon_1$.

Пусть функции $\beta_1^n(\varepsilon_1)$ существуют при $n \leq k$. Тогда функция $\Delta_k(\varepsilon) := f_1(f^k(0, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon_2$ определена при $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$, $\beta_1^k(\varepsilon_1) \leq \varepsilon_2 \leq \beta_2(\varepsilon_1)$. Из (6) и неравенства $f'_u(u, \varepsilon) > 0$ следует, что $(f^k)'_{\varepsilon_2}(0, \varepsilon) < 0$. Отсюда и из (5) получаем, что

$$(\Delta_k)'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) = (f_1)'_u(f^k(0, \varepsilon), \varepsilon)(f^k)'_{\varepsilon_2}(0, \varepsilon) + (f_1)'_{\varepsilon_2}(f^k(0, \varepsilon), \varepsilon) - 1 < 0. \quad (15)$$

Из (2), (8) и (10) имеем при $\varepsilon_2 = \beta_1^k(\varepsilon_1)$ $\Delta_k(\varepsilon) = f_1(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2 > 0$, при $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$ $\Delta_k(\varepsilon) = f_1(0, \varepsilon) - \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 < 0$. Отсюда и из (15) следует, что $\text{sgn} \Delta_k(\varepsilon) = \text{sgn}(\beta_1^{k+1}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \quad \forall \varepsilon_1 \in (0, \delta)$, где $\beta_1^{k+1}(\cdot) \in C^1$ и удовлетворяет неравенствам (13) при $n = k + 1$. Тогда при $\varepsilon_2 = \beta_1^{k+1}(\varepsilon_1)$ $f^{k+1}(0, \varepsilon) = \varepsilon_1$, а при $\beta_1^{k+1}(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$ $0 < f^{k+1}(0, \varepsilon) < \varepsilon_1$. По индукции получаем, что функции $\beta_1^n(\varepsilon_1)$ существуют $\forall n \in \mathbb{N}$. Покажем, что справедливо равенство (14). Пусть это не так. Тогда $\exists \hat{\varepsilon}_1 \in (0, \delta) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_1^n(\hat{\varepsilon}_1) = \hat{\varepsilon}_2 < \beta_2(\hat{\varepsilon}_1)$. Так как $f(u, \hat{\varepsilon}) > u$ при $\hat{\varepsilon} := (\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$ и $u \in [0, u_0(\hat{\varepsilon})]$, то при некотором $\hat{n} \in \mathbb{N}$ $\Delta_{\hat{n}}(\hat{\varepsilon}) > 0$. Для достаточно малой окрестности W точки $\hat{\varepsilon}$ $\Delta_{\hat{n}}(\varepsilon) > 0$ при всех $\varepsilon \in W$ и потому $f^n(0, \varepsilon)$ не определено для $n > \hat{n}$. С другой стороны, существует $n > \hat{n}$, при котором $\hat{\varepsilon}^n := (\hat{\varepsilon}_1, \beta_1^n(\hat{\varepsilon}_1)) \in V$. Поскольку $f^n(0, \hat{\varepsilon}^n) = \hat{\varepsilon}_1$, то получаем противоречие. Тем самым (14) верно и лемма 1 доказана.

Аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует C^1 -функция $\beta_4^n(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 \in (0, \delta)$, такая, что $f^n(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ при $\varepsilon_1 = \beta_4^n(\varepsilon_2)$, $0 < f^n(0, \varepsilon) < \varepsilon_1$ при $\beta_4^n(\varepsilon_2) < \varepsilon_1 < \beta_3(\varepsilon_2)$, $\beta_4^1(\varepsilon_1) \equiv 0$,

$$\forall \varepsilon_2 \in (0, \delta) \text{ и } n > 1 \quad \beta_4^{n-1}(\varepsilon_2) < \beta_4^n(\varepsilon_2) < \beta_3(\varepsilon_2), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_4^n(\varepsilon_2) = \beta_3(\varepsilon_2). \quad (16)$$

Учитывая (11), (13), (14) и (16), можно задать множества B_j , E_j ($j = \overline{1, 6}$) так, как они описаны в формулировке теоремы.

При $\varepsilon = 0$ из выбора окрестности U следует, что все отрицательные (положительные) полутраектории траектории, начинающиеся в U , выходят из U (совпадают с Γ_0 , начиная с некоторого момента времени).

При $\varepsilon \in B_2$ из (2) и (8) следует, что $f(0, \varepsilon) = 0$, т.е. через точку $T_1(s_{11}(\varepsilon))$, а потому и через точку $O_1(\varepsilon)$, проходит периодическая траектория $\Gamma(\varepsilon)$ поля X_ε , образованная касательными сепаратрисами точки $O_1(\varepsilon)$. Ввиду (10) $f_1(\varepsilon_1, \varepsilon) > \varepsilon_2$. Поэтому через точку $O_2(\varepsilon)$ проходит периодическая траектория $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$ поля X_ε , образованная дугой выходящей касательной сепаратрисы от $O_2(\varepsilon)$ до точки $T_2^\varepsilon(\varphi_2(f_1(\varepsilon_1, \varepsilon), \varepsilon))$ и дугой $T_2^\varepsilon[0, \varphi_2(f_1(\varepsilon_1, \varepsilon), \varepsilon)]$. Из равенства $f(0, \varepsilon) = 0$ и (3) следует, что $\forall u \in (0, u_0(\varepsilon))$ $f(u, \varepsilon) > u$. Поэтому отрицательная (положительная) полутраектория, начинающаяся в точке $T_1(s_{11}(\varepsilon) + u)$, при $u \in (u_-(\varepsilon), 0)$ выходит из U в точке кривой Γ_- (содержит точку $T_1^\varepsilon(\varphi_1(u, \varepsilon))$, и потому начиная с некоторого момента совпадает с $\Gamma(\varepsilon)$); при $u \in (0, \varepsilon_1)$ α -предельна к $\Gamma(\varepsilon)$ (содержит точку $T_2^\varepsilon(\varphi_2(f_1(f^n(u, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon))$ при некотором n и начиная с некоторого момента времени совпадает с $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$); при $u \in (\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ выходит из U в точке кривой Γ_+ (начиная с некоторого момента времени совпадает с $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$),

При $\varepsilon \in B_3$ из (2) и (10) следует, что $f(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_1$, т.е. через точку $T_1(s_{11}(\varepsilon) + \varepsilon_1)$, а потому и через точку $O_2(\varepsilon)$, проходит периодическая траектория $\Gamma(\varepsilon)$ поля X_ε , образованная касательными сепаратрисами точки $O_2(\varepsilon)$. Учитывая (3), получаем $\forall u \in [0, u_0(\varepsilon)) = [0, \varepsilon_1)$ $f(u, \varepsilon) < u$. Так как $f(0, \varepsilon) < 0$, то через точку $O_1(\varepsilon)$ проходит периодическая траектория $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ поля X_ε , образованная дугой выходящей касательной сепаратрисы точки $O_1(\varepsilon)$ от $O_1(\varepsilon)$ до точки $T_1^\varepsilon(\varphi_1(f(0, \varepsilon), \varepsilon))$ и дугой $T_1^\varepsilon[\varphi_1(f(0, \varepsilon), \varepsilon), 0]$. Аналогично случаю $\varepsilon \in B_2$ получаем, что положительная (отрицательная) полутраектория, начинающаяся в точке $T_1(s_{11}(\varepsilon) + u)$, при $u \in (u_-(\varepsilon), f(0, \varepsilon))$ совпадает с $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$, начиная с некоторого момента времени (выходит из U в точке кривой Γ_-), при $u \in (f(0, \varepsilon), \varepsilon_1)$ совпадает с $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента времени (α -предельна к $\Gamma(\varepsilon)$), при $u \in (\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ совпадает с $\Gamma(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента времени (выходит из U в точке кривой Γ_+).

При $\varepsilon \in E_2$ из (8) имеем $f(0, \varepsilon) < 0$. Кроме того, $f(u_0(\varepsilon), \varepsilon) = f_2(\varepsilon_2, \varepsilon) = \varepsilon_1 > u_0(\varepsilon)$. Из этих двух неравенств и (3) следует, что $f(\cdot, \varepsilon)$ имеет неподвижную точку $u_*(\varepsilon) \in (0, u_0(\varepsilon))$, при этом $f(u, \varepsilon) < u$, если $u \in [0, u_*(\varepsilon))$ и $f(u, \varepsilon) > u$, если $u \in (u_*(\varepsilon), u_0(\varepsilon)]$. Через точку $T_1(s_{11}(\varepsilon) + u_*(\varepsilon))$ проходит неустойчивая гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_u(\varepsilon)$. Как и в случаях $\varepsilon \in B_3$ и $\varepsilon \in B_2$, существуют периодические траектории $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ и $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$, проходящие, соответственно, через точки $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$. Положительная (отрицательная) полутраектория, начинающаяся в точке

$T_1(s_{11}(\varepsilon) + u)$, при $u \in (u_-(\varepsilon), f(0, \varepsilon))$ совпадает с $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента (выходит из U в точке кривой Γ_-), при $u \in (f(0, \varepsilon), u_*(\varepsilon))$ совпадает с $\Gamma_{1s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента (α -предельна к $\Gamma_u(\varepsilon)$), при $u \in (u_*(\varepsilon), \varepsilon_1)$ совпадает с $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента (α -предельна к $\Gamma_u(\varepsilon)$), при $u \in (\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ совпадает с $\Gamma_{2s}(\varepsilon)$ начиная с некоторого момента (выходит из U в точке кривой Γ_+).

Существование периодической траектории при $\varepsilon \in B_1 \cup E_1$ и $\varepsilon \in B_4 \cup E_3$ доказывается как и в случаях $\varepsilon \in B_2$ и $\varepsilon \in B_3$, а поведение остальных траекторий следует из лемм 1 и 2. Аналогично получаем поведение траекторий при $\varepsilon \in B_5 \cup B_6 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$.

Заключение

В работе описано несколько типичных бифуркаций в двухпараметрических семействах кусочно-гладких векторных полей на плоскости, могущих быть математическими моделями возникновения автоколебаний в реальных динамических системах с переключениями.

Список литературы

1. Баутин А. Н. Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М. : Наука, 1976. 496 с.
2. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М. : Наука, 1985. 224 с.
3. di Bernardo M., Budd Ch. J., Capneys A. R., Kowalczyk P. Piecewise smooth dynamical systems // Appl. Math. Sci. Vol. 163. London : Springer, 2008. 483 p.
4. Kuznetsov Yu. A., Rinaldi S., Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems // Intern. J. of Bifurcation and Chaos. 2003. Vol. 13, № 8. P. 2157–2188.
5. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems // J. of Differential Equations. 2011. Vol. 250, № 4. P. 1967–2023.
6. Hogan S. J., Homer M. E., Jeffrey M. R., Szalai R. Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations // J. Nonlinear Sci. 2016. Vol. 26. P. 1161–1173.
7. Simpson D. J. W. A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems // Physics Letters A. 2018. Vol. 382, № 35. P. 2439–2444.
8. Ройтенберг В. Ш. О рождении странного аттрактора из точки стыка линий разрыва векторного поля // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2016. № 4. С. 53–59.
9. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус» // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2. С. 18–31.
10. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях петли сепаратрисы двумерной кусочно-гладкой динамической системы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 1. С. 36–50.
11. Ройтенберг В. Ш. Бифуркации сшитого тройного цикла кусочно-гладкой непрерывной динамической системы // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». 2024. Т. 16, № 1. С. 39–48.
12. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М. : Наука, 1966. 568 с.

References

1. Bautin A.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti* = *Methods and techniques of qualitative research of dynamic systems on the plane*. Moscow: Nauka, 1976:496. (In Russ.)
2. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* = *Differential equations with the explosive right part*. Moscow: Nauka, 1985:224. (In Russ.)
3. di Bernardo M., Budd Ch.J., Capneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise smooth dynamical systems. *Appl. Math. Sci. Vol. 163*. London: Springer, 2008:483.
4. Kuznetsov Yu.A., Rinaldi S., Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *Intern. J. of Bifurcation and Chaos*. 2003;13(8):2157–2188.
5. Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *J. of Differential Equations*. 2011;250(4):1967–2023.
6. Hogan S.J., Homer M.E., Jeffrey M.R., Szalai R. Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations. *J. Nonlinear Sci.* 2016;26:1161–1173.
7. Simpson D.J.W. A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems. *Physics Letters A*. 2018;382(35):2439–2444.
8. Roytenberg V.Sh. On the birth of a strange attractor from the junction point of the lines of the rupture of the vector field. *Vestnik Adygeyskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki* = *Bulletin of Adygea State University. Series: Natural and mathematical sciences*. 2016;(4):53–59. (In Russ.)
9. Roytenberg V.Sh. On bifurcations in the vicinity of a special point such as “sewn three or time focus”. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2017;(2):18–31. (In Russ.)
10. Roytenberg V.Sh. On bifurcation of the loop of the separatics of a two-dimensional piece-clatter of the dynamic system. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;(1):36–50. (In Russ.)
11. Roytenberg V.Sh. Bifurcation of a stitched triple cycle with a piece of continuous dynamic system. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika»* = *Bulletin of South Ural State University. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*. 2024;16(1):39–48. (In Russ.)
12. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* = *Quality theory of second -order dynamic systems*. Moscow: Nauka, 1966:568. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владимир Шлеймович Ройтенберг

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры высшей
математики, Ярославский
государственный технический
университет (Россия, г. Ярославль,
Московский проспект, 88)

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Vladimir Sh. Roitenberg

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department of higher
mathematics, Yaroslavl State Technical
University (88 Moskovskiy avenue,
Yaroslavl, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 25.03.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.04.2025

Принята к публикации / Accepted 29.04.2025

УДК 517.9

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-5

Итерационные методы решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра I рода

А. Н. Тында

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

tynda@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Проведено численное исследование интегральных уравнений первого рода с квадратичной нелинейностью, являющихся частью обобщенного интегро-степенного ряда Вольтерра и описывающих динамические системы с одним входом и одним выходом. Такие уравнения широко применяются в моделировании стационарных систем с неизменными динамическими характеристиками в течение переходного процесса. *Материалы и методы.* В основе предложенных итерационных численных методов лежит предварительная линеаризация интегрального оператора по модифицированной схеме Ньютона – Канторовича и использование параметра регуляризации для обеспечения устойчивости к колебанию входных данных. Для решения линейных уравнений на каждой итерации применен метод последовательных приближений в сочетании с аппроксимацией точного решения полиномиальным сплайном, построенным на каждом сегменте разбиения по нулям многочленов Лежандра. Для вычисления интегралов используется составная квадратурная формула Гаусса. *Результаты и выводы.* Предложен ряд итерационных численных схем решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра. Сформулированы теоремы сходимости модифицированного метода Ньютона – Канторовича. Приведены численные результаты, подтверждающие сходимость методов.

Ключевые слова: ряд Вольтерра, квадратичные интегральные уравнения, линеаризация оператора, регуляризация, итерационный процесс

Для цитирования: Тында А. Н. Итерационные методы решения квадратичных интегральных уравнений Вольтерра I рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 58–69. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-5

Iterative methods for solving quadratic Volterra integral equations of the first kind

A.N. Tynda

Penza State University, Penza, Russia

tynda@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The paper is devoted to the numerical study of integral equations of the first kind with quadratic nonlinearity, which are part of the generalized Volterra integro-power series and describe dynamical systems with one input and one output. Such equations are widely used in the modeling of stationary systems with constant dynamic characteristics during the transfer process. *Materials and methods.* The proposed iterative numerical methods are based on the preliminary linearization of the integral operator according to the modified Newton-Kantorovich scheme and the use of the regularization parameter to ensure stability to fluctuations in the input data. To solve linear equations at

each iteration, the method of successive approximations is used in combination with the approximation of the exact solution by a polynomial spline constructed for each segment on the zeros of Legendre polynomials. The Gauss compound quadrature formula is used to calculate integrals. *Results and conclusions.* A number of iterative numerical schemes for solving quadratic Volterra integral equations are proposed. The convergence theorems of the modified Newton-Kantorovich method are formulated. Numerical results confirming the convergence of the methods are presented.

Keywords: Volterra series, quadratic integral equations, linearization of the operator, regularization, iterative process

For citation: Tynda A.N. Iterative methods for solving quadratic Volterra integral equations of the first kind. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):58–69. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-5

1. Постановка задачи

В 1930 г. итальянским математиком Вито Вольтерра было введено понятие интегро-степенного ряда и доказано, что он обобщает известную формулу Тейлора для функций n переменных [1]. Фундаментальным результатом является то, что такие ряды описывают нелинейные системы с памятью.

Рассмотрим одну из форм записи этого ряда, моделирующего стационарную динамическую систему (с неизменными динамическими характеристиками в течение переходного процесса T):

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t K_n(t, s_1, s_2, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

В развернутом виде:

$$y(t) = \int_0^t K_1(t, s) x(s) ds + \iint_{00}^t K_2(t, s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2 + \\ + \iiint_{000}^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x(s_1) x(s_2) x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots, \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Равенство (1) описывает нелинейную динамическую систему «вход-выход», при этом ядра $K_1(t, s)$, $K_2(t, s_1, s_2)$, ..., играют роль переходных характеристик, учитывающих динамические нелинейности системы с одним входом $x(t)$ и одним выходом $y(t)$.

Интегро-степенные ряды Вольтерра широко применяются для моделирования различных нелинейных динамических объектов [1–3]. Основанием для их применения является теорема Фреше – континуальный аналог теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

Для модели (2) можно выделить два основных направления исследований:

- задачи идентификации, заключающиеся в определении переходных характеристик $K_1(t, s)$, $K_2(t, s_1, s_2)$, ..., (см., например [4–6]);
- задачи исследования и решения полилинейных интегральных уравнений [3, 7, 8].

Частными случаями (2) являются:

- $N = 1$. Классическое линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода:

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

- $N = 2$. Квадратичное (билинейное) интегральное уравнение Вольтерра:

$$\int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Классические уравнения вида (3) с различного рода ядрами в различных пространствах достаточно хорошо изучены, разработан широкий спектр методов с регуляризацией (см., например, монографию [9]).

Уравнения I рода с ядрами, терпящими разрывы вдоль семейства гладких кривых (*слаборегулярные* уравнения Вольтерра I рода), классифицированы Д. Н. Сидоровым [2, 10] и численно исследовались в работах [11, 12]. Модели Вольтерра с такими ядрами находят применение при моделировании различных динамических процессов, включая системы накопителей энергии [12].

Среди работ, посвященных изучению интегральных уравнений вида (4), необходимо отметить серию работ А. С. Апарцина (см., например, [3, 7]).

2. Итерационный метод с линеаризацией оператора

Рассмотрим уравнение (4), наложив некоторые условия на входящие в него функции. Пусть ядра $K_1(t, s)$ и $K_2(t, s_1, s_2)$ являются непрерывными функциями каждого из своих аргументов и дифференцируемыми по переменной t , а правая часть $y(t) \in C^1[0, T]$, пусть, кроме того, $y(0) = 0$. Дополнительные условия, обеспечивающие существование единственного непрерывного решения уравнения (4), представлены в работе [3]. Дальнейшие рассуждения проводятся в рамках этих ограничений.

Непосредственная дискретизация уравнения (4) с использованием классических схем аппроксимации приводит к системам нелинейных (квадратичных) алгебраических уравнений и может столкнуться с вопросами выделения нужных приближенных значений искомой функции. В данной главе построим итерационный приближенный метод решения (4), основанный на схеме Ньютона – Канторовича и предполагающий линеаризацию интегрального оператора. В этом случае задача сводится к последовательному решению линейных интегральных уравнений вида (3). Для динамических систем с векторными входом и выходом, описываемых квадратичными интегральными уравнениями, метод Ньютона – Канторовича применен в работе [8].

Обозначим

$$Fx \equiv \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 - y(t). \quad (5)$$

Тогда уравнение (4) в операторной форме принимает вид

$$Fx = 0. \quad (6)$$

Производная Фреше оператора F в точке x_0 определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} [F'(x_0)](x) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \omega x) - F(x_0)}{\omega} = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \\ &+ \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \left[\int_0^t (x_0(s_1) + \omega x(s_1))ds_1 \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)(x_0(s_2) + \omega x(s_2))ds_2 - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t x_0(s_1)ds_1 \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_0(s_2)ds_2 \right] = \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{x_0(s_1)\omega x(s_2) + \omega x(s_1)x_0(s_2) + \omega^2 x(s_1)x(s_2)}{\omega} ds_1 ds_2 = \\ &= \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_0(s_1)x(s_2)ds_1 ds_2 + \\ &+ \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x_0(s_2)x(s_1)ds_1 ds_2 = \int_0^t [K_1(t, s) + G_{0,1}(t, s) + G_{0,2}(t, s)]x(s)ds, \end{aligned}$$

где

$$G_{m,1}(t, s) = \int_0^t K_2(t, s_1, s)x_m(s_1)ds_1, \quad G_{m,2}(t, s) = \int_0^t K_2(t, s, s_2)x_m(s_2)ds_2.$$

Таким образом, получаем следующее выражение для производной интегрального оператора F , вычисленной в некоторой точке $x_m(t) \in C[0, T]$:

$$[F'(x_m)](x) = \int_0^t L_m(t, s)x(s)ds, \quad L_m(t, s) = K_1(t, s) + G_{m,1}(t, s) + G_{m,2}(t, s). \quad (7)$$

Итерационный процесс Ньютона – Канторовича принимает вид

$$F'(x_m(t))\Delta x_{m+1}(t) = -F(x_m(t)), \quad \Delta_{m+1} = x_{m+1} - x_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

В развернутом виде получаем

$$\int_0^t L_m(t, s)(x_{m+1}(s) - x_m(s))ds = y(t) - \int_0^t K_1(t, s)x_m(s)ds -$$

$$-\int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, на каждом шаге m итерационного процесса (8) возникает необходимость решения линейного интегрального уравнения Вольтерра I рода относительно очередного приближения $x_{m+1}(t)$:

$$\int_0^t L_m(t, s) x_{m+1}(s) ds = Y_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$Y_m(t) = y(t) + \int_0^t [L_m(t, s) - K_1(t, s)] x_m(s) ds - \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2;$$

$x_0(t)$ – начальное приближение.

Вычисление производной оператора F на каждом шаге m итерационного метода (8) в новой точке $x_m(t)$ может быть весьма затратным.

Модифицированная схема Ньютона – Канторовича [13], которая позволяет избежать такой необходимости, имеет вид

$$F'(x_0(t)) \Delta x_{m+1}(t) = -F(x_m(t)), \quad \Delta_{m+1} = x_{m+1} - x_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$\int_0^t L_0(t, s) x_{m+1}(s) ds = Y_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где

$$Y_m(t) = y(t) + \int_0^t [L_0(t, s) - K_1(t, s)] x_m(s) ds - \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2.$$

Несмотря на потерю в скорости сходимости такого итерационного процесса, получаем важное преимущество – ядро $L_0(t, s)$ интегрального уравнения (11) остается неизменным на каждой итерации, так как зависит лишь от начального приближения $x_0(t)$ и в ряде случаев может быть получено аналитически.

2.1. Сходимость

Следуя классической монографии [13], применим общую теорию к нашему итерационному процессу (10) и сформулируем теорему его сходимости в банаховом пространстве $C[0, T]$ со стандартной нормой:

$$\|x(t)\|_{C[0, T]} = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|.$$

Теорема 1. Пусть оператор F дважды непрерывно дифференцируем в шаре $\Omega_0 : \{x, \|x - x_0\|_{C[0, T]} \leq p\}$ и, кроме того:

1) уравнение

$$\int_0^t L_0(t,s)x_1(s)ds = Y_0(t) \quad (12)$$

имеет единственное решение на $[0, T]$, т.е. существует обратный оператор

$$\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1};$$

$$2) \|\Delta x_1\|_{C[0,T]} \leq \eta;$$

$$3) \|\Gamma_0 F''(x)\|_{C[0,T]} \leq L, \quad x \in \Omega_0.$$

Если также

$$h = L\eta < \frac{1}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta \leq p \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta,$$

то уравнение (6) имеет единственное решение x^* в Ω_0 , процесс (10) сходится к x^* , а скорость сходимости оценивается неравенством

$$\|x_m - x^*\|_{C[0,T]} \leq \frac{\eta}{h} (1 - \sqrt{1 - 2h})^{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Существование единственного непрерывного решения уравнения (12) обеспечивается условием $y(t) \in C^1[0, T]$ (нетрудно проверить, что в этом случае и $Y_0(t) \in C^1[0, T]$). Таким образом, условие 1 теоремы выполняется. Нетрудно также проверить, что оператор F имеет в точке $x_0 \in C[0, T]$ непрерывную вторую производную (билинейный интегральный оператор).

Для оценки скорости сходимости схемы (10) при необходимости можно обойти условие существования второй производной $[F''(x_0)]$. Достаточные условия, обеспечивающие сходимость итерационного процесса для модифицированного метода Ньютона – Канторовича, предложены в работе [14]. Применим их для нашей задачи:

Теорема 2. Пусть

$$\|\Delta x_1\|_{C[0,T]} \leq B_0, \quad \|F(x_0)\|_{C[0,T]} = \eta_0.$$

Пусть также в шаре $\Omega: \left\{x, \|x - x_0\|_{C[0,T]} \leq \frac{B_0 \eta_0}{1 - q}\right\} (q < 1)$ выполняется

следующее условие:

$$\|F'(x^{(1)}) - F'(x^{(2)})\|_{C[0,T]} \leq q / B_0.$$

Тогда уравнение (6) имеет единственное решение x^* в Ω , последовательность приближенных решений (10) сходится к x^* и справедлива оценка погрешности:

$$\|x_m - x^*\|_{C[0,T]} \leq \frac{q^m \eta_0 B_0}{1-q}.$$

3. Решение линейного уравнения

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода (11), возникающее на каждой итерации модифицированного метода Ньютона – Канторовича. Для его численного решения будем использовать два стандартных подхода.

Метод последовательных приближений. Одним из эффективных подходов к решению уравнений Вольтерра первого рода с гладкими ядрами является сведение уравнения первого рода к уравнению второго рода посредством дифференцирования. Продифференцируем обе части уравнения (11):

$$\int_0^t \frac{\partial L_0(t,s)}{\partial t} x_{m+1}(s) ds + L_0(t,t) x_{m+1}(t) = Y'_m(t).$$

Теперь, используя принцип сжимающих отображений, определим приближенное решение уравнения как предел последовательности приближений:

$$x_{m+1}^{p+1}(t) = f(t) - \int_0^t V(t,s) x_{m+1}^p(s) ds, \quad x_{m+1}^0 = f(t), \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где

$$f(t) = \frac{Y'_m(t)}{L_0(t,t)}, \quad V(t,s) = \frac{1}{L_0(t,t)} \frac{\partial L_0(t,s)}{\partial t}, \quad L_0(t,t) \neq 0.$$

4. Сглаживающий итерационный метод

Хорошо известно, что задача решения уравнений I рода, к которым относится и уравнение (4), может быть некорректной. В первую очередь тут играют роль показатели гладкости входящих в уравнение функций, а точнее, наборы рассматриваемых пространств. Интегральный оператор (5) отображает пространство решений не на все это пространство, а на его подпространство. Поэтому обратный оператор не ограничен, а значит, близость решений и близость правых частей следует оценивать в разных метриках (близость правых частей должна быть в более сильной метрике).

Одним из проявлений некорректности задачи является нарушение непрерывной зависимости решений от начальных данных. В системах типа «вход-выход» в ситуации неточного экспериментального определения выходного сигнала $y(t)$ это обстоятельство играет существенную роль. В таких случаях необходима регуляризация. Предложим сглаживающий итерационный метод, позволяющий получить устойчивое решение уравнения (4) с некоторой точностью, которое затем может быть использовано в методе Ньютона – Канторовича в качестве начального приближения:

$$x_{m+1}(t) = x_m(t) + \gamma \left(y(t) - \int_0^t K_1(t,s) x_m(s) ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2, \right) \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

$$x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t),$$

где $x_0(t)$ – начально приближение.

На практике параметр регуляризации γ можно выбирать из условия минимальности невязки для достаточно больших значений m :

$$\begin{aligned} \varepsilon_m = & \left\| \int_0^t K_1(t, s) x_m(s) ds + \right. \\ & \left. + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x_m(s_1) x_m(s_2) ds_1 ds_2 - y(t) \right\|_{C[0, T]} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (15)$$

Приближенное решение $x_{m+1}(t)$ на каждой новой итерации будем искать в виде кусочно-линейной функции, построенной на равномерной сетке узлов $t_i = iT / N$, $i = \overline{0, N}$:

$$X_N^{m+1}(t) = x_{m+1}(t_{k-1}) + \frac{x_{m+1}(t_k) - x_{m+1}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = \overline{1, N}.$$

Значения $x_{m+1}(0)$ определяются с помощью дифференцирования исходного уравнения, а для вычисления неизвестных значений $x_{m+1}(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, имеем последовательность равенств:

$$\begin{aligned} x_{m+1}(t_k) = & X_N^m(t_k) + \gamma \left(y(t_k) - \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_1(t_k, s) X_N^m(s) ds - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{t_{l-1}}^{t_l} K_2(t_k, s_1, s_2) X_N^m(s_1) X_N^m(s_2) ds_1 ds_2 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

5. Численные результаты

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} & \int_0^t (1+t-s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t (1+s_1+s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = \\ & = 1 - \sin(t) - \cos(t) + 2t\sin^2(t) + \sin^2(t) + \sin(2t), \quad t \in [0, 1], \end{aligned} \quad (17)$$

точным решением которого является функция $x(t) = \cos t$.

5.1. Итерационный метод с регуляризацией

Проиллюстрируем работу предложенного сглаживающего итерационного алгоритма на модельном уравнении (17) при различных значениях параметра регуляризации γ . Результаты решения модельной задачи (17) приведены в табл. 1 и 2, в которых приняты следующие обозначения: m – количество итераций, $\epsilon_m = \max_{t \in [0, T]} |x(t) - x_m(t)|$ – норма погрешности.

Таблица 1

Зависимость погрешности вычислений от числа итераций при $\gamma = 0,03$

m	5	10	25	50	100	250	500	1000
ϵ_m	0,034	0,023	0,016	0,0052	0,00312	0,00097	0,00061	0,00032

Таблица 2

Зависимость погрешности вычислений от числа итераций при $\gamma = 0,01$

m	5	10	25	50	100	250	500	1000
ϵ_m	0,03	0,023	0,016	0,023	0,011	0,002	0,0012	0,0007

5.2. Модифицированный метод Ньютона – Канторовича

В табл. 3 приведены результаты работы итерационного метода (10). Для решения линейных уравнений на каждой итерации применен метод последовательных приближений в сочетании с аппроксимацией точного решения полиномиальным сплайном, построенным на каждом сегменте разбиения по нулям многочленов Лежандра. Для вычисления интегралов используется составная квадратурная формула Гаусса. В качестве начального приближения $x_0(t)$ выбрано приближенное решение, полученное методом (14) с невязкой (15), равной 0,01.

Таблица 3

Результаты решения уравнения (17)

m	N	r	ϵ_1	ϵ_2
1	10	3	0,00078	0,00082
2	10	3	$6,49 \cdot 10^{-5}$	$8,67 \cdot 10^{-5}$
3	10	3	$9,73 \cdot 10^{-6}$	$2,84 \cdot 10^{-5}$
5	10	3	$4,33 \cdot 10^{-6}$	$7,61 \cdot 10^{-6}$
2	20	3	$1,29 \cdot 10^{-6}$	$3,13 \cdot 10^{-6}$
5	20	3	$1,13 \cdot 10^{-6}$	$2,32 \cdot 10^{-6}$
2	20	4	$8,26 \cdot 10^{-7}$	$2,92 \cdot 10^{-6}$
5	20	4	$1,14 \cdot 10^{-7}$	$4,26 \cdot 10^{-7}$
5	50	5	$6,37 \cdot 10^{-8}$	$1,95 \cdot 10^{-7}$
10	100	5	$3,27 \cdot 10^{-12}$	$6,11 \cdot 10^{-12}$

В табл. 3 используются следующие обозначения: N – число подобластей разбиения отрезка $[0, T]$, m – число итераций модифицированного ме-

тода Ньютона – Канторовича; $\mathbf{r}$ – порядок сплайна; $\varepsilon_1 = \max_{k,i} |x_m(t_k^i) - x^*(t_k^i)|$ –

погрешность в узлах сетки; $\varepsilon_2 = \|x_m(t) - x^*(t)\|_{C[0,T]}$.

Заключение

Как можно видеть из представленных результатов, метод показывает достаточно быструю сходимость, согласующуюся с теоретическими оценками, что во многом обеспечивается выбором хорошего начального приближения.

Список литературы

1. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1982. 304 с.
2. Sidorov D. Integral Dynamical Models // Singularities, Signals And Control / ed. by L. O. Chua, World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A. Singapore : World Scientific Press, 2015. Vol. 87.
3. Апарцин А. С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2007. № 1. С. 13–41.
4. Солодуша С. В., Антипина Е. Д. К идентификации ядер Вольтерра в интегральных моделях линейных нестационарных динамических систем // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2023. № 224. Р. 125–132.
5. Воскобойников Ю. Е., Боева В. А. Идентификация квадратичного ядра уравнения Вольтерра для моделирования нелинейных динамических систем // Системы анализа и обработки данных. 2022. Т. 85, № 1. С. 25–40.
6. Sidorov D., Tynda A., Muratov V., Yanitsky E. Volterra black-box models identification methods: direct collocation vs. least squares // Mathematics. 2024. Vol. 12 (2). P. 227. doi: 10.3390/math12020227
7. Апарцин А. С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 8. С. 1380–1388.
8. Солодуша С. В. К численному решению одного класса систем полиномиальных уравнений Вольтерра I рода // Сибирский журнал вычислительной математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 117–126.
9. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие. Киев : Наукова думка, 1986. 543 с.
10. Sidorov D. N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel // Diff. Equat. 2013. Vol. 49. P. 210–216.
11. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 313. P. 119–128.
12. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels // Numerical Solution and Application for Power Systems Operation. Mathematics. 2020. Vol. 8. P. 1257.
13. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional Analysis. 2nd edition. Pergamon, 1982. 589 p.
14. Бойков И. В. Некоторые вопросы приближенного решения нелинейных операторных уравнений методом Ньютона – Канторовича // Точные науки : сб. аспирантских работ. Казань : Изд-во Каз. гос. ун-та, 1970. С. 82–94.

References

1. Vol'terra V. *Teoriya funktsionalov, integral'nykh i integrodifferentsial'nykh uravneniy = Theory of functionals, integral and integro -reference equations*. Moscow: Nauka, 1982:304. (In Russ.)
2. Sidorov D. Integral Dynamical Models. *Singularities, Signals And Control*. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A. Singapore: World Scientific Press, 2015;87.
3. Apartsin A.S. Voltaire's polyline integral equations and kinds: elements of theory and numerical methods. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika = Proceedings of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2007;(1):13–41. (In Russ.)
4. Solodusha S.V., Antipina E.D. To the identification of Voltaire's nuclei in integrated models of linear non -stationary dynamic systems. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory = The results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews*. 2023;(224):125–132. (In Russ.)
5. Voskoboynikov Yu.E., Boeva V.A. Identification of the quadratic nucleus of Voltaire's equation for modeling nonlinear dynamic systems. *Sistemy analiza i obrabotki dannykh = Data analysis and processing systems*. 2022;85(1):25–40. (In Russ.)
6. Sidorov D., Tynda A., Muratov V., Yanitsky E. Volterra black-box models identification methods: direct collocation vs. least squares. *Mathematics*. 2024;12(2):227. doi: 10.3390/math12020227
7. Apartsin A.S. To the numerical solution of one class of systems of polynomial equations of Voltaire I kind. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics*. 2007;47(8):1380–1388. (In Russ.)
8. Solodusha S.V. To the numerical solution of one class of systems of polynomial equations of Voltaire I kind. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki = Siberian journal computing mathematics*. 2018;21(1):117–126. (In Russ.)
9. Verlan' A.F., Sizikov V.S. *Integral'nye uravneniya: metody, algoritmy, programmy: spravochnoe posobie = Integral equations: methods, algorithms, programs: reference manual*. Kiev: Naukova dumka, 1986:543. (In Russ.)
10. Sidorov D.N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel. *Diff. Equat.* 2013;49:210–216.
11. Muftahov I., Tynda A., Sidorov D. Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017;313:119–128.
12. Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels. *Numerical Solution and Application for Power Systems Operation. Mathematics*. 2020;8:1257.
13. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional Analysis. 2nd edition*. Pergamon, 1982:589.
14. Boykov I.V. Some issues of the approximate solution of nonlinear operator equations by Newton – Kantorovich. *Tochnye nauki: sb. aspir. rab. = Exact sciences: collected papers of postgraduate students*. Kazan: Izd-vo Kaz. gos. un-ta, 1970:82–94. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Александр Николаевич Тында

кандидат физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: tynda@pnzgu.ru

Aleksandr N. Tynda

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, head
of the sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 09.04.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 20.04.2025

Принята к публикации / Accepted 10.05.2025

УДК 539.196.3

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-6

Нековалентное взаимодействие атомов бора и азота

А. А. Сокуров¹, С. Ш. Рехвиашвили²

^{1,2}Институт прикладной математики и автоматизации – филиал
Федерального государственного бюджетного научного учреждения
«Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр
Российской академии наук», Нальчик, Россия

¹isokuroff@mail.ru, ²rsergo@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Расчет взаимодействия между атомами бора и азота интересен с точки зрения прогнозирования физических свойств и создания новых диэлектрических материалов и безуглеродных наноматериалов. Цель работы заключается в расчете нековалентного (дисперсионного) взаимодействия для пар атомов B–B, N–N и B–N из первых квантово-механических принципов. Данный расчет на практике проводится впервые. *Материалы и методы.* Используется теория функционала плотности в приближении электронного газа. При этом учитываются кулоновский, кинетический, обменный и корреляционный вклады в энергию взаимодействия. Электронная плотность задается с учетом оболочечной структуры атомов в приближении Рутаана – Хартри – Фока. Для вычисления несобственных интегралов используется оригинальный численный алгоритм, основанный на применении квадратурных формул и технологии распараллеливания вычислений CUDA. *Результаты.* В широком диапазоне межатомных расстояний построены функции радиальных электронных плотностей и соответствующие потенциальные кривые, рассчитаны параметры потенциальных ям и константы дисперсионного взаимодействия, проверена корректность эмпирических правил Лоренца – Бергло комбинирования параметров потенциалов. *Выводы.* Полученные значения констант дисперсионного взаимодействия для гомоатомных пар согласуются с известными из литературы результатами. С помощью первопринципных расчетов можно определять параметры модельных парных потенциалов, в частности потенциала Сазерленда. Показано, что для нековалентного взаимодействия атомов бора и азота правила Лоренца – Бергло не работают.

Ключевые слова: нековалентное взаимодействие, метод функционала электронной плотности, метод Хартри – Фока, приближение электронного газа, парный потенциал взаимодействия, параметры парных потенциалов

Для цитирования: Сокуров А. А., Рехвиашвили С. Ш. Нековалентное взаимодействие атомов бора и азота // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 70–80. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-6

Non-covalent interaction of boron and nitrogen atoms

A.A. Sokurov¹, S.S. Rekhviashvili²

© Сокуров А. А., Рехвиашвили С. Ш., 2025. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

^{1,2}Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of Federal Scientific Center “Kabardino-Balkarian Scientific
Center of the Russian Academy of Sciences”, Nalchik, Russia

¹isokuroff@mail.ru, ²rsergo@mail.ru

Abstract. *Background.* The calculation of the interaction between boron and nitrogen atoms is interesting from the point of view of predicting physical properties and creating new dielectric materials and carbon-free nanomaterials. The purpose of the work is to calculate non-covalent (dispersion) interaction for pairs of atoms B-B, N-N and B-N based on the first principles of quantum mechanics. The calculation is carried out in practice for the first time. *Materials and methods.* The article uses the density functional theory (DFT) in the electron gas approximation. The Coulomb, kinetic, exchange, and correlation contributions to the interaction energy are taken into account. The electron density is given taking into account the shell structure of atoms in the Roothaan-Hartree-Fock approximation. An original numerical algorithm based on the use of quadrature formulas and CUDA computing parallelization technology is used to calculate improper integrals. *Results.* Radial electron density functions and corresponding potential curves are constructed over a wide range of interatomic distances. The parameters of potential wells and the constants of the dispersion interaction are calculated. The correctness of the Lorentz-Berthelot rules of thumb for combining potential parameters has been verified. *Conclusions.* The obtained values of the dispersion interaction constants for homoatomic pairs are consistent with the results known from the literature. Using first-principles calculations, it is possible to determine the parameters of model pair potentials, in particular the Sutherland potential. It is shown that the Lorentz-Berthelot rules do not work for the non-covalent interaction of boron and nitrogen atoms.

Keywords: non-covalent interaction, electron density functional method (DFT), Hartree-Fock method, electron gas approximation, pair interaction potential, parameters of pair potentials

For citation: Sokurov A.A., Rekhviashvili S.S. Non-covalent interaction of boron and nitrogen atoms. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):70–80. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-6

Введение

Интерес к атомам бора и азота и взаимодействию между ними обусловлен, в частности, таким перспективным материалом, как нитрид бора (BN). Главным образом это касается гексагонального нитрида бора (hBN) [1–4]. Гексагональный нитрид бора представляет собой слоистый неорганический синтетический кристалл, обладающий чрезвычайно высокими твердостью, удельным электрическим сопротивлением, теплопроводностью и термической прочностью. В качестве керамического материала он используется для регулирования температуры, теплозащиты, смазки, а также в качестве наполнителя для конструкционных композитов [1, 2]. Кроме того, hBN обладает уникальными оптическими свойствами, которые проявляются в ультрафиолетовом и инфракрасном диапазонах. Благодаря этому материал находит применение в фотонике [3]. В CMOS-технологии производства интегральных микросхем hBN может применяться в качестве двумерного изолятора в подзатворной области транзисторов [4].

Различные вопросы, относящиеся к валентному взаимодействию атомов бора и азота, а также к взаимодействию Ван-дер-Ваальса нитрида бора в конденсированном состоянии, рассматривались во многих работах, среди которых можно отметить [5–13]. Однако расчеты из первых принципов в единых теоретических рамках дисперсионного взаимодействия Ван-дер-

Ваальса для атомных пар В–В, N–N и В–N до сих пор не проводились. Между тем взаимодействие данного типа играет весьма важную роль, поскольку предшествует ковалентному связыванию атомов, например в газовой фазе. Кроме того, нековалентные взаимодействия играют ключевую роль в формировании супрамолекулярных структур, которые широко распространены в химии, биологии и нанотехнологиях. Они характеризуются низкими значениями энергии и короткими временами образования ассоциатов, что позволяет эффективно управлять их структурными и физическими свойствами. Супрамолекулярная химия структур со связями В–N рассмотрена, например, в [14, 15].

В настоящей статье решаются следующие основные задачи:

- 1) расчет зависимости потенциала взаимодействия от расстояния для пар атомов В–В, N–N и В–N;
- 2) вычисление параметров потенциальной ямы (глубина D и равновесное расстояние r_0);
- 3) проверка эмпирических правил комбинирования параметров парного межатомного потенциала Лоренца – Бертло для атомной пары В–N;
- 4) расчет констант дисперсионного взаимодействия.

В расчетах применяется метод функционала электронной плотности и приближение электронного газа. Электронные плотности рассчитываются с помощью слейтеровских орбиталей в приближении Рутаана – Хартри – Фока с учетом оболочечной структуры взаимодействующих атомов. Все формулы в статье записаны в атомной системе единиц ($\hbar = e = m_e = 1$). Графики потенциалов и соответствующие данные в таблице приведены в привычных единицах.

1. Потенциал взаимодействия

Приближение Гордона – Кима [16, 17] используется в качестве теоретической модели для нековалентного взаимодействия двух атомов. Предполагается, что результирующая электронная плотность равна сумме плотностей отдельных атомов. Кулоновская составляющая потенциала взаимодействия учитывает отталкивание между ядрами, отталкивание между электронными облаками и притяжение между ядрами и электронными облаками атомов. Все вклады объединяются в одно выражение:

$$U_1(r) = 16\pi^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \rho_a(x) \rho_b(y) I(r, x, y) x^2 y^2 dx dy, \quad (1)$$

$$I(r, x, y) = \frac{1}{r} + F(r, x, y) - \frac{2}{r+x+|r-x|} - \frac{2}{r+y+|r-y|}, \quad (2)$$

$$F(r, x, y) = \begin{cases} \frac{2}{r+x+|r-x|}, & y < |r-x|, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) - \frac{r}{4xy} - \frac{(x-y)^2}{4rxy}, & |r-x| < y < |r+x|, \\ \frac{1}{y}, & y > r+x, \end{cases} \quad (3)$$

где r – расстояние между атомами; $\rho_{a,b}$ – электронные плотности атомов, индексы a и b обозначают взаимодействующие атомы.

Квантово-статистическая составляющая, относящаяся к электронному газу, вычисляется с помощью интеграла:

$$U_2(r) = \frac{\pi r^3}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [(\rho_a + \rho_b)E(\rho_a + \rho_b) - \rho_a E(\rho_a) - \rho_b E(\rho_b)] d\mu d\lambda, \quad (4)$$

$$E(\rho) = \frac{3}{10} (3\pi^2 \rho)^{2/3} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi} \rho \right)^{1/3} + E_c(\rho), \quad (5)$$

$$E_c(\rho) = \begin{cases} 2,711816\rho^{1/2} - 0,706052\rho^{1/3} - 3,819822\rho^{2/3} - 1,319676\rho^{5/6}, & \rho < \eta_1, \\ -0,7062 - 0,00633 \ln(\rho), & \eta_1 \leq \rho \leq \eta_2, \\ -0,010367 \ln(\rho) - (0,001861 \ln(\rho) + 0,008869)\rho^{-1/3} - 0,062849, & \rho > \eta_2, \end{cases}$$

$$\rho_a(r; \lambda, \mu) = \rho_a \left(\frac{r(\lambda + \mu)}{2} \right), \quad \rho_b(r; \lambda, \mu) = \rho_b \left(\frac{r(\lambda - \mu)}{2} \right),$$

где отдельные слагаемые в (5) отвечают кинетическому, обменному и корреляционному вкладам соответственно; $\eta_1 = 2,387324 \cdot 10^{-4}$ и $\eta_2 = 0,696013$ – параметры сшивки в корреляционном вкладе. Двойной интеграл в (4) выражен через эллипсоидальные координаты (λ, μ) . При его вычислении с учетом (5) под ρ понимаются электронные плотности взаимодействующих атомов $\rho_{a,b}$ и их сумма $\rho_b + \rho_b$. Результирующая потенциальная энергия взаимодействия двух атомов есть

$$U(r) = U_1(r) + U_2(r). \quad (6)$$

В модели (1)–(6) требуется задать $\rho_{a,b}$. Кроме того, возникает потребность в эффективном алгоритме численной реализации модели, которая основывается на вычислении кратных интегралов в (1) и (4).

2. Электронная плотность

Для вычисления электронных плотностей можно воспользоваться хорошо проверенными численными данными из [18], которые получены в приближении Рутаана – Хартри – Фока с волновыми функциями Слейтера. Электронная плотность связана с многоэлектронной волновой функцией атома [19]:

$$\rho(\mathbf{r}) = Z \iiint |\psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x})|^2 d\boldsymbol{\sigma} d\mathbf{x}, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{x}$ – спиновые и пространственные переменные; Z – заряд ядра атома. В сферической системе координат (7) принимает вид

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \int \rho(\mathbf{r}) d\Omega, \quad (8)$$

где Ω – телесный угол. Для (7) выполняется условие нормировки

$$4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr = Z. \quad (9)$$

Функции Слейтера представляют собой волновые функции водородо-подобного атома

$$\psi_{n,l,m}(r, \Omega) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\Omega), \quad (10)$$

где использованы стандартные из атомной физики обозначения. Вследствие ортогональности сферических гармоник усредненную по сфере электронную плотность можно записать в виде

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n,l} N_{n,l} |R_{n,l}(r)|^2, \quad (11)$$

$$R_{n,l}(r) = \frac{1}{(2\lambda_{n,l})!} (2\zeta_{n,l})^{\lambda_{n,l}+1/2} r^{\lambda_{n,l}-1} \exp(-\zeta_{n,l}r), \quad (12)$$

$$Z = \sum_{n,l} N_{n,l}, \quad (13)$$

где $\lambda_{n,l}$ и $\zeta_{n,l}$ – таблично заданные параметры [18]; $N_{n,l}$ – количество электронов в подоболочке, определяемое квантовыми числами n и l .

3. Численные расчеты и обсуждение

Для численных расчетов потенциала межатомного взаимодействия используется алгоритм, разработанный в [20]. Алгоритм включает в себя применение квадратурных формул, анализ подынтегральных функций электронных плотностей и процедуру распараллеливания вычислений на графических процессорах CUDA. Благодаря данному алгоритму расчет потенциала взаимодействия по модели (1)–(6) производится с точностью вплоть до шестого знака после запятой за непродолжительное машинное время.

Кривая $U(r)$ для каждой атомной пары строится от некоторого выбранного расстояния между атомами $r_{\min}$, определяемого величиной энергии отталкивания, и до $r_{\max} = 15$ а.е. Глубина потенциальной ямы D и равновесное расстояние между атомами r_0 находятся по табулированным данным путем их условного перебора.

Результаты расчета приведены в виде графиков на рис. 1, 2. Для сравнения в табл. 1 указаны суммы ковалентных радиусов r_c взаимодействующих атомов по данным [21]. Их значения задают расстояния, на которых образуются ковалентные неполярные связи. При таких расстояниях (это менее 0,2 нм) у атомов бора и азота происходит гибридизация электронных орбиталей, поэтому использованное приближение уже применять нельзя. Можно видеть, что во всех случаях выполняется условие $r_c < r_0$.

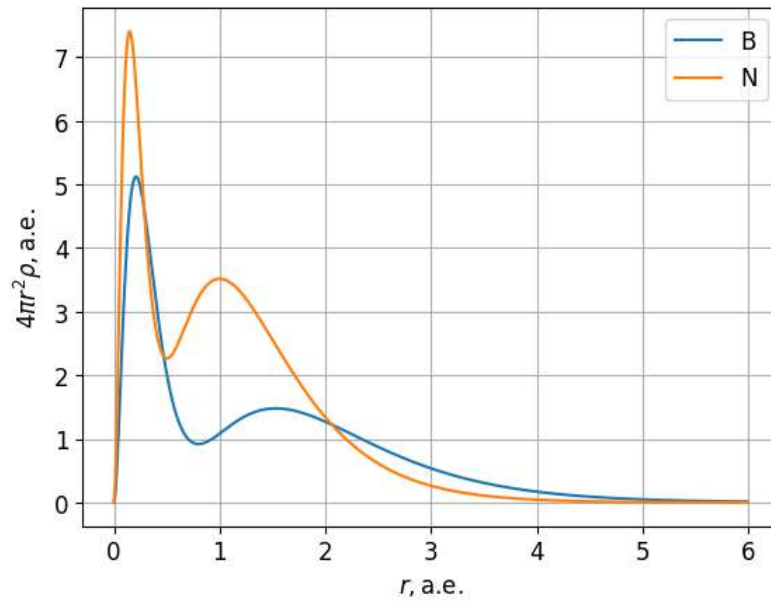


Рис. 1. Радиальные электронные плотности атомов бора и азота

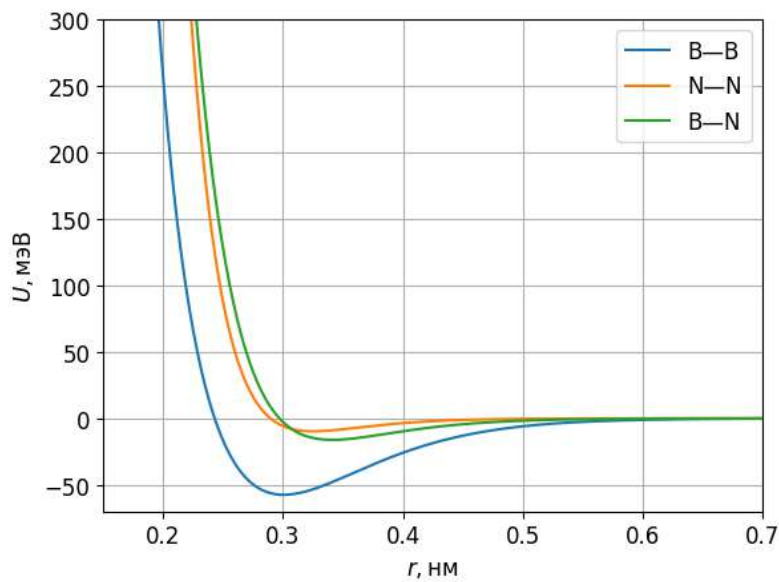


Рис. 2. Зависимости парных межатомных потенциалов от расстояния

Расчеты потенциальной функции по модели (1)–(6) в области ямы позволяют оценить дисперсионную константу C_6 для какого-либо модельного потенциала. Рассмотрим здесь простейший потенциал Сазерленда [22, с. 206]:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r < r_0, \\ -D\left(\frac{r_0}{r}\right)^6, & r \geq r_0, \end{cases} \quad (14)$$

для которого

$$C_6 = Dr_0^6, \quad (15)$$

где D и r_0 в нашем случае рассчитываются по модели (1)–(6). Отметим, что потенциал (14) находит применение в термодинамических и статистических моделях, например при вычислении вириальных коэффициентов, а также оказывается удобным для описания адсорбции наночастиц на поверхности твердого тела [23]. Из теории сил Ван-дер-Ваальса известна формула Слейтера – Кирквуда, которая получена вариационным методом [24, с. 36]:

$$C_6 = \frac{3}{2} \frac{\alpha_a \alpha_b}{\sqrt{\alpha_a / N_a + \sqrt{\alpha_b / N_b}}}, \quad (16)$$

где $\alpha_{a,b}$ и $N_{a,b}$ – статические поляризуемости и валентности атомов; $\alpha_a = 20,5$ а.е., $\alpha_b = 7,4$ а.е. [25] и $N_a = N_b = 3$ (индексы обозначают "a" → бор, "b" → азот). По (15) и (16) проводились расчеты, результаты которых в сравнении с данными из [26] представлены в табл. 1. Можно видеть, что по порядку величины все значения согласуются друг с другом, хотя формула (15) дает несколько заниженные результаты.

Таблица 1

Параметры взаимодействия

Система	D , мэВ	r_0 , нм	r_c , нм	C_6 , а.е. [26]	C_6 , а.е. (15)	C_6 , а.е. (16)
B–B	57,475	0,302	0,170	95,7; 99,5	72,4	120,6
N–N	9,740	0,325	0,142	22,0; 24,2	19,4	26,2
B–N	16,170	0,341	0,156	–	42,8	54,4

На практике параметры взаимодействия разнородных атомов часто оцениваются по параметрам взаимодействия одинаковых атомов согласно правилам комбинирования Лоренца – Берто [27, с. 29]:

$$D_{ab} = \sqrt{D_a D_b}, \quad r_{ab} = \frac{r_a + r_b}{2}. \quad (17)$$

Из представленной выше теории следует, что эмпирические формулы (17) не могут считаться универсальными. Так, из полученных результатов следует, что для системы B–N правила комбинирования не выполняются даже качественно. Первопринципные расчеты дают $r_{ab} > r_a, r_b$ (табл. 1), что не согласуется с (17). Это объясняется электронным строением взаимодействующих атомов. Вдали от ядер имеется область пространства, в которой электронная плотность атома бора превышает электронную плотность атома азота (см. рис. 1). Это приводит к изменению энергии отталкивания и смещению положения минимума потенциальной кривой вправо. Вычисление глубины потенциальной ямы по (17) дает погрешность более 45 %, что также неприемлемо.

Заключение

Построены зависимости потенциальной энергии нековалентного взаимодействия от расстояния для комбинаций атомов B–B, N–N, B–N. В известных нам литературных источниках подобные зависимости отсутствуют. Использовалась теория функционала плотности в приближении электронного газа с электронными плотностями, учитывающими оболочечную структуру атомов. Проведен расчет параметров взаимодействия всех пар атомов (глубина потенциальной ямы и равновесное расстояние) и оценены значения константы дисперсионного взаимодействия. Первопринципные расчеты могут быть использованы для идентификации параметров модельных потенциалов, которые находят применение при моделировании методами молекулярной динамики и Монте-Карло. Показано, что правила Лоренца – Бергло для нековалентного взаимодействия атомов бора и азота дают ошибочные результаты.

Список литературы

1. Перевислов С. Н. Структура, свойства и области применения графитоподобного гексагонального нитрида бора // Новые огнеупоры. 2019. № 6. С. 35.
2. Naclerio A. E., Kidambi P. R. A review of scalable hexagonal boron nitride (h-BN) synthesis for present and future applications // Advanced Material. 2022. Vol. 35, № 6. P. 2207374. doi: 10.1002/adma.202207374
3. Ogawa S., Fukushima S., Shimatani M. Hexagonal boron nitride for photonic device applications: A review // Materials. 2023. Vol. 16, № 5. P. 2005. doi: 10.3390/ma16052005
4. Knobloch T., Illarionov Y. Y., Ducry F. [et al.]. The performance limits of hexagonal boron nitride as an insulator for scaled CMOS devices based on two-dimensional materials // Nature Electronics. 2021. Vol. 4. P. 98. doi: 10.1038/s41928-020-00529-x
5. Lorenz M., Agreiter J., Smith A. M., Bondybey V. E. Electronic structure of diatomic boron nitride // Journal of Chemical Physics. 1996. Vol. 104, № 8. P. 3143.
6. Acharya A., Sharma S., Liu, X. [et al.]. A review on van der Waals boron nitride quantum dots // Journal of Carbon Research. 2021. Vol. 7. P. 35. doi: 10.3390/c7020035
7. Cheng-Rong Hsing, Ching Cheng, Jyh-Pin Chou [et al.]. Van der Waals interaction in a boron nitride bilayer // New Journal of Physics. 2014. Vol. 16. P. 113015. doi: 10.1088/1367-2630/16/11/113015
8. Vuong T. Q. P., Liu S., Van der Lee A. [et al.]. Isotope engineering of van der Waals interactions in hexagonal boron nitride // Nature Materials. 2018. Vol. 17. P. 152. doi: 10.1038/NMAT5048
9. Hongping Li, Wendi Fu, Ke Xu [et al.]. The electronic structure and physicochemical property of boron nitridene // Journal of Molecular Graphics and Modelling. 2020. Vol. 94. P. 107475. doi: 10.1016/j.jmkgm.2019.107475
10. Zaliziak V. E., Zolotov O. A., Sidorov K. A. Interatomic potential for metal diborides // Molecular Simulation. 2021. Vol. 47, № 12. P. 982. doi: 10.1080/08927022.2021.19359
11. Kochaev A., Katin K., Maslov M., Singh S. Covalent and van der Waals interactions in a vertical heterostructure composed of boron and carbon // Physical Review B. 2022. Vol. 105. P. 235444. doi: 10.1103/PhysRevB.105.235444
12. Chkhartishvili L. Relative stability of boron planar clusters in diatomic molecular model // Molecules. 2022. Vol. 27. P. 1469. doi: 10.3390/molecules27051469
13. Chkhartishvili L. Construction of semiclassical interatomic B–B pair potential to characterize all-boron nanomaterials // Characterization and Application of Nanomaterials. 2023. Vol. 6, № 1. P. 1. doi: 10.24294/can.v6i1.1852

14. Icli B., Sheepwash E., Riis-Johannessen T. [et al.]. Dative boron–nitrogen bonds in structural supramolecular chemistry: Multicomponent assembly of prismatic organic cages // *Chemical Science*. 2011. Vol. 2. P. 1719. doi: 10.1039/C1SC00320H
15. Chen B., Jäkle F. Boron-nitrogen Lewis pairs in the assembly of supramolecular macrocycles, molecular cages, polymers, and 3D materials // *Angewandte Chemie International Edition*. 2024. Vol. 63, № 3. P. e202313379. doi: 10.1002/anie.202313379
16. Gordon R. G., Kim Y. S. Theory for the forces between closed-shell atoms and molecule // *Journal of Chemical Physics*. 1972. Vol. 56. P. 3122. doi: 10.1063/1.1677649
17. Waldman M., Gordon R. G. Scaled electron gas approximation for intermolecular forces // *Journal of Chemical Physics*. 1972. Vol. 71. P.1325. doi: 10.1063/1.438433
18. Clementi E., Roetti C. Atomic data and nuclear data tables. 1974. Vol. 14, № 3-4. P. 177. doi: 10.1016/S0092-640X(74)80016-1
19. Koga T. Analytical Hartree-Fock electron densities for atoms He through Lr // *Theoretica Chimica Acta*. 1997. Vol. 95. P. 113. doi: 10.1007/BF02341696
20. Сокуров А. А. Вычисление интегралов в теории функционала электронной плотности в приближении электронного газа с использованием технологии CUDA // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2024. Т. 20, № 3. С. 335. doi: 10.21638/spbu10.2024.303
21. Pyykkö P., Atsumi M. Molecular single-bond covalent radii for elements 1–118 // *Chemistry: A European Journal*. 2009. Vol. 15. P. 186. doi: 10.1002/chem.200800987
22. Каплан И. Г. Межмолекулярные взаимодействия. Физическая интерпретация, компьютерные расчеты и модельные потенциалы. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 397 с.
23. Рехвиашвили С. Ш., Бухурова М. М. Адсорбционное взаимодействие серебряных наночастиц с кремниевой подложкой // *Физика твердого тела*. 2025. Т. 67, № 1. С. 175. doi: 10.61011/FTT.2025.01.59785.224
24. Бараш Ю. С. Силы Ван-Дер-Ваальса. М. : Наука, 1988. 344 с.
25. Schwerdtfeger P., Nagle J. K. Table of static dipole polarizabilities of the neutral elements in the periodic table // *Molecular Physics*. 2019. Vol. 117, № 9-12. P. 1200.
26. Chu X., Dalgarno A. Linear response time-dependent density functional theory for van der Waals coefficients // *Journal of Chemical Physics*. 2004. Vol. 121. P. 4083. doi: 10.1063/1.1779576
27. Рит М. Наноконструирование в науке и технике. Введение в мир нанорасчета. Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 160 с.

References

1. Perevislov S.N. Structure, properties and applications of graphite-like hexagonal boron nitride. *Novye ognepory = New refractories*. 2019;(6):35. (In Russ.)
2. Naclerio A.E., Kidambi P.R. A review of scalable hexagonal boron nitride (h-BN) synthesis for present and future applications. *Advanced Material*. 2022;35(6):2207374. doi: 10.1002/adma.202207374
3. Ogawa S., Fukushima S., Shimatani M. Hexagonal boron nitride for photonic device applications: A review. *Materials*. 2023;16(5):2005. doi: 10.3390/ma16052005
4. Knobloch T., Illarionov Y.Y., Ducry F. et al. The performance limits of hexagonal boron nitride as an insulator for scaled CMOS devices based on two-dimensional materials. *Nature Electronics*. 2021;4:98. doi: 10.1038/s41928-020-00529-x
5. Lorenz M., Agreiter J., Smith A.M., Bondybey V.E. Electronic structure of diatomic boron nitride. *Journal of Chemical Physics*. 1996;104(8):3143.
6. Acharya A., Sharma S., Liu, X. et al. A review on van der Waals boron nitride quantum dots. *Journal of Carbon Research*. 2021;7:35. doi: 10.3390/c7020035

7. Cheng-Rong Hsing, Ching Cheng, Jyh-Pin Chou et al. Van der Waals interaction in a boron nitride bilayer. *New Journal of Physics*. 2014;16:113015. doi: 10.1088/1367-2630/16/11/113015
8. Vuong T.Q.P., Liu S., Van der Lee A. et al. Isotope engineering of van der Waals interactions in hexagonal boron nitride. *Nature Materials*. 2018;17:152. doi: 10.1038/NMAT5048
9. Hongping Li, Wendi Fu, Ke Xu et al. The electronic structure and physicochemical property of boron nitridene. *Journal of Molecular Graphics and Modelling*. 2020;94:107475. doi: 10.1016/j.jmgm.2019.107475
10. Zaliziak V.E., Zolotov O.A., Sidorov K.A. Interatomic potential for metal diborides. *Molecular Simulation*. 2021;47(12):982. doi: 10.1080/08927022.2021.19359
11. Kochaev A., Katin K., Maslov M., Singh S. Covalent and van der Waals interactions in a vertical heterostructure composed of boron and carbon. *Physical Review B*. 2022;105:235444. doi: 10.1103/PhysRevB.105.235444
12. Chkhartishvili L. Relative stability of boron planar clusters in diatomic molecular model. *Molecules*. 2022;27:1469. doi: 10.3390/molecules27051469
13. Chkhartishvili L. Construction of semiclassical interatomic B–B pair potential to characterize all-boron nanomaterials. *Characterization and Application of Nanomaterials*. 2023;6(1):1. doi: 10.24294/can.v6i1.1852
14. Icli B., Sheepwash E., Riis-Johannessen T. et al. Dative boron–nitrogen bonds in structural supramolecular chemistry: Multicomponent assembly of prismatic organic cages. *Chemical Science*. 2011;2:1719. doi: 10.1039/C1SC00320H
15. Chen B., Jäkle F. Boron-nitrogen Lewis pairs in the assembly of supramolecular macrocycles, molecular cages, polymers, and 3D materials. *Angewandte Chemie International Edition*. 2024;63(3):e202313379. doi: 10.1002/anie.202313379
16. Gordon R.G., Kim Y.S. Theory for the forces between closed-shell atoms and molecule. *Journal of Chemical Physics*. 1972;56:3122. doi: 10.1063/1.1677649
17. Waldman M., Gordon R.G. Scaled electron gas approximation for intermolecular forces. *Journal of Chemical Physics*. 1972;71:1325. doi: 10.1063/1.438433
18. Clementi E., Roetti C. *Atomic data and nuclear data tables*. 1974;14(3-4):177. doi: 10.1016/S0092-640X(74)80016-1
19. Koga T. Analytical Hartree-Fock electron densities for atoms He through Lr. *Theoretica Chimica Acta*. 1997;95:113. doi: 10.1007/BF02341696
20. Sokurov A.A. Calculation of integrals in the electron density functional theory in the electron gas approximation using the CUDA technology. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universitetata. Seriya 10. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Bulletin of Saint Petersburg University. Series 10. Applied mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2024;20(3):335. (In Russ.). doi: 10.21638/spbu10.2024.303
21. Pyykkö P., Atsumi M. Molecular single-bond covalent radii for elements 1–118. *Chemistry: A European Journal*. 2009;15:186. doi: 10.1002/chem.200800987
22. Kaplan I.G. *Mezhmolekulyarnye vzaimodeystviya. Fizicheskaya interpretatsiya, komp'yuternye raschety i model'nye potentsialy = Intermolecular interactions. Physical interpretation, computer calculations and model potentials*. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2012:397. (In Russ.)
23. Rekhviashvili S.Sh., Bukhurova M.M. Adsorption interaction of silver nanoparticles with silicon substrate. *Fizika tverdogo tela = Solid state physics*. 2025;67(1):175. (In Russ.). doi: 10.61011/FTT.2025.01.59785.224
24. Barash Yu.S. *Sily Van-Der-Vaal'sa = Van der Waals forces*. Moscow: Nauka, 1988:344. (In Russ.)
25. Schwerdtfeger P., Nagle J. K. Table of static dipole polarizabilities of the neutral elements in the periodic table. *Molecular Physics*. 2019;117(9-12):1200.
26. Chu X., Dalgarno A. Linear response time-dependent density functional theory for van der Waals coefficients. *Journal of Chemical Physics*. 2004;121:4083. doi: 10.1063/1.1779576

27. Rit M. *Nanokonstruirovaniye v nauke i tekhnike. Vvedenie v mir nanorascheta = Nanoengineering in science and engineering. Introduction to the world of nanocalculation*. Izhevsk: Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2005:160. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Аслан Артурович Сокуров

кандидат физико-математических наук,
заведующий лабораторией
автоматизации измерений,
Институт прикладной математики
и автоматизации – филиал Федерального
государственного бюджетного научного
учреждения «Федеральный научный
центр «Кабардино-Балкарский научный
центр Российской академии наук»
(Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А)

E-mail: isokuroff@mail.ru

Aslan A. Sokurov

Candidate of physical and mathematical
sciences, head of the laboratory
of measurement automation, Institute
of Applied Mathematics and Automation –
branch of Federal Scientific Center
“Kabardino-Balkarian Scientific Center
of the Russian Academy of Sciences”
(89A Shortanova street, Nalchik, Russia)

Серго Шотович Рехвиашвили

доктор физико-математических наук,
заведующий отделом теоретической
и математической физики,
Институт прикладной математики
и автоматизации – филиал Федерального
государственного бюджетного научного
учреждения «Федеральный научный
центр «Кабардино-Балкарский научный
центр Российской академии наук»
(Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А)

E-mail: rsergo@mail.ru

Sergo Sh. Rekhviashvili

Doctor of physical and mathematical
sciences, head of the department
of theoretical and mathematical physics,
Institute of Applied Mathematics and
Automation – branch of Federal Scientific
Center “Kabardino-Balkarian Scientific
Center of the Russian Academy
of Sciences” (89A Shortanova street,
Nalchik, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 06.03.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 22.03.2025

Принята к публикации / Accepted 16.04.2025

Исследование электронных и оптических свойств тонкопленочных покрытий на основе $\text{SnO}_2:\text{Sb}$

Т. О. Зинченко¹, Е. А. Печерская², В. Д. Кревчик³, С. В. Коновалов⁴,
Д. В. Артамонов⁵, С. А. Гурин⁶, М. Д. Новичков⁷, А. Макиевский⁸

^{1,2,3,4,5,6,7}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

⁴Сибирский государственный индустриальный университет,
Кемеровская область – Кузбасс, Новокузнецк, Россия

⁸SINTERFACE Technologies, Берлин, Германия

¹scar0243@gmail.com, ²pea1@list.ru, ³physics@pnzgu.ru,
⁴konovalov@sibsiu.ru, ⁵dva@pnzgu.ru, ⁶teslananoel@rambler.ru,
⁷novichkov1998maks@gmail.com, ⁸a.makievski@sinterface.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Прозрачные проводящие оксиды (ППО) на основе диоксида олова (SnO_2), легированного сурьмой (Sb), представляют значительный интерес для современных технологий благодаря уникальному сочетанию высокой прозрачности в видимом диапазоне и хорошей электрической проводимости. Такие материалы широко применяются в оптоэлектронике, солнечных элементах и сенсорных устройствах. Однако для оптимизации их свойств необходимо глубокое понимание механизмов переноса заряда, что может быть достигнуто с использованием классической теории Друде. Целью данной работы является анализ на основе теории Друде электронных и оптических свойств тонкопленочных покрытий $\text{SnO}_2:\text{Sb}$, полученных методом спрей-пиролиза, а также исследование влияния концентрации носителей заряда и подвижности на проводимость и плазменную частоту. *Материалы и методы.* Тонкопленочные покрытия $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ получены методом спрей-пиролиза на стеклянных подложках. Концентрация носителей заряда n определялась с помощью эффекта Холла, а удельное сопротивление измерялось четырехточечным методом. Для анализа электрофизических свойств использована классическая теория Друде, которая позволила рассчитать подвижность носителей, время релаксации и плазменную частоту. Оптические свойства исследовались с использованием спектроскопии в видимом и ближнем инфракрасном диапазонах. *Результаты.* Проводимость пленок $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ варьируется в диапазоне от 10^3 до 10^4 См/м в зависимости от степени легирования сурьмой. Подвижность носителей заряда находится в диапазоне от $4,83 \cdot 10^{-4}$ до $15,91 \cdot 10^{-4}$ м²/(В·с). Плазменная частота принадлежит диапазону от $1,19 \cdot 10^{14}$ до $7,94 \cdot 10^{14}$ рад/с, что соответствует длинам волн от 378 до 2520 нм. Пленки $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ демонстрируют высокую прозрачность (более 80 %) в видимом диапазоне для образцов с низкой концентрацией носителей. С увеличением концентрации носителей наблюдается сдвиг плазменной частоты в ультрафиолетовую область, что приводит к снижению прозрачности в видимом диапазоне. Дрейфовая скорость линейно возрастает с увеличением напряжения (U) и уменьшается с увеличением расстояния (d) между контактами. Для образцов с высокой подвижностью дрейфовая скорость достигает значений $13,25 \cdot 10^{-4}$ при $U = 5$ мВ и $d = 5$ мм. *Выводы.* На основе теории Друде выполнен анализ электрофизических и оптических свойств тонкопленочных покрытий $\text{SnO}_2:\text{Sb}$, что позволило установить возможность оптимизации проводимости и прозрачности материала посредством варьирования степени легирования сурьмой. Показано, что дрейфовая скорость носителей заряда зависит от подвижности, напряжения и геометрии образца. Это открывает возможности для проектирования

устройств с улучшенными характеристиками. Полученные результаты демонстрируют перспективность использования $\text{SnO}_2\text{:Sb}$ в оптоэлектронных устройствах, где требуется сочетание высокой прозрачности и проводимости.

Ключевые слова: прозрачные проводящие оксиды, спрей-пиролиз теория Друде, теория свободных электронов, перенос заряда, концентрация носителей заряда, подвижность носителей заряда, плазменная частота

Финансирование: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект «Синтез и исследование перспективных наноматериалов, покрытий и устройств электроники» (№ 124041700069-0).

Для цитирования: Зинченко Т. О., Печерская Е. А., Кревчик В. Д., Коновалов С. В., Артамонов Д. В., Гурин С. А., Новичков М. Д., Макиевский А. Исследование электронных и оптических свойств тонкопленочных покрытий на основе $\text{SnO}_2\text{:Sb}$ // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 81–92. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-7

Investigation of the electronic and optical properties of thin-film coatings based on $\text{SnO}_2\text{:Sb}$

T.O. Zinchenko¹, E.A. Pecherskaya², V.D. Krevchik³, S.V. Konovalov⁴,
D.V. Artamonov⁵, S.A. Gurin⁶, M.D. Novichkov⁷, A. Makievski⁸

^{1,2,3,4,5,6,7}Penza State University, Penza, Russia

⁴Siberian State Industrial University,

Kemerovo region – Kuzbass, Novokuznetsk, Russia

⁸SINTERFACE Technologies, Berlin, Germany

¹scar0243@gmail.com, ²pea1@list.ru, ³physics@pnzgu.ru,

⁴konovalov@sibsiu.ru, ⁵dva@pnzgu.ru, ⁶teslananoel@rambler.ru,

⁷novichkov1998maks@gmail.com, ⁸a.makievski@sinterface.com

Abstract. *Background.* Transparent conducting oxides (TCOs) based on tin dioxide (SnO_2) doped with antimony (Sb) are of significant interest for modern technologies due to their unique combination of high transparency in the visible range and good electrical conductivity. Such materials are widely used in optoelectronics, solar cells, and sensor devices. However, optimizing their properties requires a deep understanding of charge transport mechanisms, which can be achieved using the classical Drude theory. The purpose of this work is to apply the Drude theory to analyze the electronic and optical properties of $\text{SnO}_2\text{:Sb}$ thin films obtained by spray pyrolysis, as well as to investigate the influence of charge carrier concentration and mobility on conductivity and plasma frequency. *Materials and methods.* Thin films of $\text{SnO}_2\text{:Sb}$ were deposited on glass substrates using the spray pyrolysis method. The charge carrier concentration n was determined using the Hall effect, and the resistivity was measured using the four-point probe method. The classical Drude theory was used to analyze the electronic properties, allowing the calculation of carrier mobility, relaxation time, and plasma frequency. Optical properties were investigated using spectroscopy in the visible and near-infrared ranges. *Results.* The conductivity σ of $\text{SnO}_2\text{:Sb}$ films varied in the range of 10^3 – 10^4 S/m depending on the antimony doping level. The carrier mobility ranged from $4.83 \cdot 10^{-4}$ to $15.91 \cdot 10^{-4}$ $\text{m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$. The plasma frequency was in the range of $1.19 \cdot 10^{14}$ to $7.94 \cdot 10^{14}$ rad/s, corresponding to wavelengths from 378 nm to 2520 nm. The $\text{SnO}_2\text{:Sb}$ films demonstrated high transparency in the visible range (over 80%) for samples with low carrier concentration. With increasing carrier concentration, a shift in the plasma frequency toward the ultraviolet region was observed, leading to a decrease in transparency in the visible range. The drift velocity increased linearly with applied voltage and decreased with increasing distance between contacts. For samples with high mobility, the drift velocity reached values of $13.25 \cdot 10^{-4}$ m/s at $U=5$ mV and $d=5$ mm. *Conclusions.* The Drude theory

was successfully applied to analyze the electronic and optical properties of $\text{SnO}_2\text{:Sb}$ thin films. It was established that the conductivity and transparency of the material can be optimized by varying the antimony doping level. It was shown that the drift velocity of charge carriers depends on mobility, voltage, and sample geometry. This opens up opportunities for designing devices with improved characteristics. The obtained results demonstrate the potential of using $\text{SnO}_2\text{:Sb}$ in optoelectronic devices where a combination of high transparency and conductivity is required.

Keywords: transparent conducting oxides, spray pyrolysis, Drude theory, free electron theory, charge transport, charge carrier concentration, charge carrier mobility, plasma frequency

Financing: the work was supported by the grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation “Synthesis and research of promising nanomaterials, coatings and electronics devices” (No. 124041700069-0).

For citation: Zinchenko T.O., Pecherskaya E.A., Krevchik V.D., Kononov S.V., Artamonov D.V., Gurin S.A., Novichkov M.D., Makievski A. Investigation of the electronic and optical properties of thin-film coatings based on $\text{SnO}_2\text{:Sb}$. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):81–92. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-7

Введение

Теория Друде позволяет формализовать движение электронов в металлах и проводящих материалах, базируясь на представлении об электронах как о свободных частицах, движущихся в среде с определенным сопротивлением. Основные положения теории описывают электроны как классические частицы, совершающие столкновения с ионами кристаллической решетки, при этом между столкновениями электроны движутся свободно [1, 2]. Столкновения происходят случайно, среднее время между столкновениями называется временем релаксации. Внешнее электрическое поле ускоряет электроны, но столкновения ограничивают их скорость, что приводит к возникновению сопротивления.

Объектом исследования являются прозрачные проводящие оксиды (ППО) на основе диоксида олова, легированного сурьмой, которые получены методом спрей-пиролиза [3, 4]. Прозрачные проводящие оксиды – полупроводниковые материалы, обладающие высокими показателями прозрачности и проводимости [5–7]. Теория Друде применена к полученным образцам с целью анализа данных по электрофизическим (время релаксации, дрейфовая скорость) и оптическим свойствам (плазменная частота) для улучшения в дальнейшем технологии их изготовления.

Материалы и методы

Для корректного применения теоретической модели Друде при исследовании проводящих прозрачных оксидов требуется косвенным образом определить ряд наиболее значимых электрофизических параметров, к которым относятся следующие: плотность носителей заряда, их подвижность и электрическая проводимость образцов. В рамках данного исследования для измерения электрического сопротивления использован метод Ван дер Пау, обладающий рядом преимуществ [8].

Особенность примененного метода заключается в возможности работы с плоскопараллельными образцами различной геометрической конфигура-

ции, что выгодно отличает его от традиционных холловских измерений, требующих строго прямоугольной формы испытуемых образцов. Теоретически оптимальная геометрия для измерений по методу Ван дер Пау представляет собой структуру в виде четырехлепесткового клевера с характерными разделительными просветами между контактными зонами. Однако практическая реализация такой конфигурации сопряжена со значительными технологическими трудностями.

В исследовательской практике предпочтение отдается однородным по толщине образцам упрощенной геометрии, преимущественно квадратной или круглой формы. На таких образцах размещается минимально необходимое количество омических контактов, как правило четыре точечных электрода, расположенных равномерно по периметру исследуемой пластины. При работе с квадратными образцами контактные площадки логично располагать в угловых точках квадрата.

Ключевая методологическая особенность процедуры измерений заключается в специфическом алгоритме определения удельного электрического сопротивления. В условиях приложенного магнитного поля электрический ток пропускается через пару соседних контактов, в то время как разность электрических потенциалов U_{BC} регистрируется между двумя оставшимися электродами (рис. 1,а).

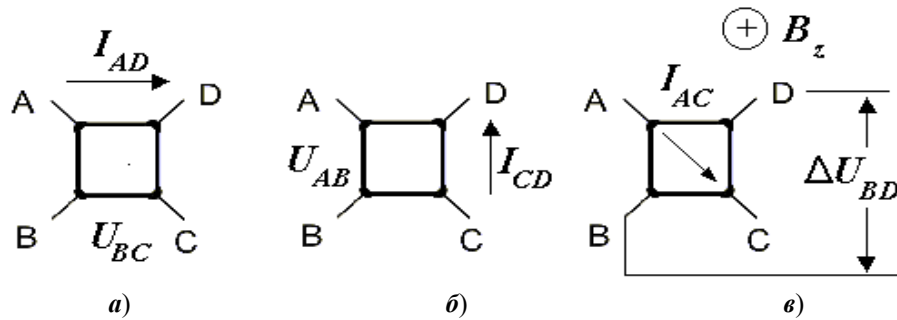


Рис. 1. Образец Ван дер Пау квадратной формы:
а – измерение $R_{AD,BC}$; б – измерение $R_{CD,AB}$; в – измерение $\Delta R_{AC,BD}$

В результате определяется сопротивление $R_{AD,BC} = U_{BC}/I_{AD}$ (индексы соответствуют номерам контактов). Затем процедура повторяется, но для других пар контактов (рис. 1,б), и определяется сопротивление $R_{CD,AB} = U_{AB}/I_{CD}$.

Вычисление удельного сопротивления ρ (в Ом·см) выполняется по формуле

$$\rho = \frac{\pi d}{\ln 2 \cdot I} U = \frac{4,52d}{I} U, \quad (1)$$

где d – толщина слоя прозрачного проводящего покрытия.

Подвижность электронов измерена с помощью эффекта Холла.

Коэффициент Холла (см³/Кл) находится из следующего выражения:

$$R_H = \frac{U_{AC}(B) - U_{AC}(-B) + U_{BD}(B) - U_{BD}(-B)}{4IB} d, \quad (2)$$

где $U_{AC}(B)$, $U_{AC}(-B)$ – значения напряжения между контактами A и C при включенном положительном и отрицательном направлениях магнитного поля (рис. 1,б); B – индукция магнитного поля.

Способ определения R_H в основном не отличается от классического, единственным отличием является то, что в процессе измерений нужно изменять направление магнитного поля.

Холловская подвижность рассчитывается на основе полученных значений ρ и R_H :

$$\mu = \frac{R_H}{\rho}. \quad (3)$$

Широкое распространение метода Ван дер Пау в исследовательской практике обусловлено его относительной простотой и возможностью выполнения измерений на образцах произвольной формы при необходимости контроля только одного геометрического параметра – толщины образца d .

Также рассчитывается концентрация носителей заряда n :

$$n = \frac{n_s}{d}. \quad (4)$$

Для расчета объемной концентрации зарядов n_s применяется следующая формула:

$$n_s = \frac{IB}{eV_H}, \quad (5)$$

где V_H – напряжение Холла; e – заряд электрона.

Результаты

В табл. 1 представлены результаты измерения сопротивления, толщины покрытия, концентрации и подвижности носителей заряда для 10 образцов прозрачных проводящих оксидов.

Таблица 1
Результаты измерений параметров, полученные методом Ван дер Пау

Образец	$R(\rho/d)$, Ом/□	d , нм	n , см ⁻³	μ , см ² /(В·с)
1	675	$1,48 \cdot 10^{-3}$	$5,31 \cdot 10^{19}$	8,03
2	637	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$8,11 \cdot 10^{19}$	9,15
3	426	$2,35 \cdot 10^{-3}$	$3,56 \cdot 10^{20}$	9,12
4	139	$7,19 \cdot 10^{-3}$	$9,04 \cdot 10^{20}$	8,41
5	89	$1,12 \cdot 10^{-2}$	$7,79 \cdot 10^{20}$	6,02
6	221	$4,52 \cdot 10^{-3}$	$2,33 \cdot 10^{21}$	7,38
7	95	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{20}$	6,31
8	57	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$8,98 \cdot 10^{20}$	6,34
9	28	$3,57 \cdot 10^{-2}$	$1,73 \cdot 10^{21}$	4,83
10	262	$3,82 \cdot 10^{-3}$	$2,15 \cdot 10^{21}$	5,64

Согласно классической теории Друде время релаксации электронов определяется по формуле

$$\tau = \frac{\sigma m}{ne^2}, \quad (6)$$

где проводимость σ рассчитывается по известному сопротивлению ($\sigma = 1 / R$).

Результаты расчета проводимости и времени релаксации представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчета значений проводимости
и времени релаксации электронов

Образец	σ , См/□	τ , с
1	$1,48 \cdot 10^{-3}$	$1,37 \cdot 10^{-11}$
2	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-11}$
3	$2,35 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-11}$
4	$7,19 \cdot 10^{-3}$	$1,44 \cdot 10^{-11}$
5	$1,12 \cdot 10^{-2}$	$1,03 \cdot 10^{-11}$
6	$4,52 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-11}$
7	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$1,08 \cdot 10^{-11}$
8	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$1,08 \cdot 10^{-11}$
9	$3,57 \cdot 10^{-2}$	$8,26 \cdot 10^{-12}$
10	$3,82 \cdot 10^{-3}$	$9,65 \cdot 10^{-12}$

Для анализа полученных результатов построены зависимости времени релаксации от проводимости покрытия (рис. 2,*а*) и подвижности носителей заряда (рис. 2,*б*).

Время релаксации прямо пропорционально подвижности, что следует из формулы (6). Выводы о том, что с увеличением подвижности возрастает время релаксации, хорошо согласуются с результатами, представленными в работах [9, 10]. Время релаксации не зависит напрямую от концентрации электронов, но косвенно связано через подвижность. Высокая концентрация электронов может приводить к увеличению числа столкновений, что способно снижать подвижность и, соответственно, время релаксации. Проводимость зависит как от концентрации электронов, так и от времени релаксации. Таким образом, чем больше подвижность носителей заряда, тем выше проводимость при прочих равных условиях.

Теория Друде также применена для описания оптических свойств проводящих материалов [11, 12]. С ее помощью рассчитана плазменная частота ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m^*}}, \quad (7)$$

где ϵ_0 – диэлектрическая постоянная; m^* – эффективная масса электрона.

Плазменная частота определяет, при каких длинах волн материал становится прозрачным.

Чтобы выразить плазменную частоту в герцах, использована формула:

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}, \quad (8)$$

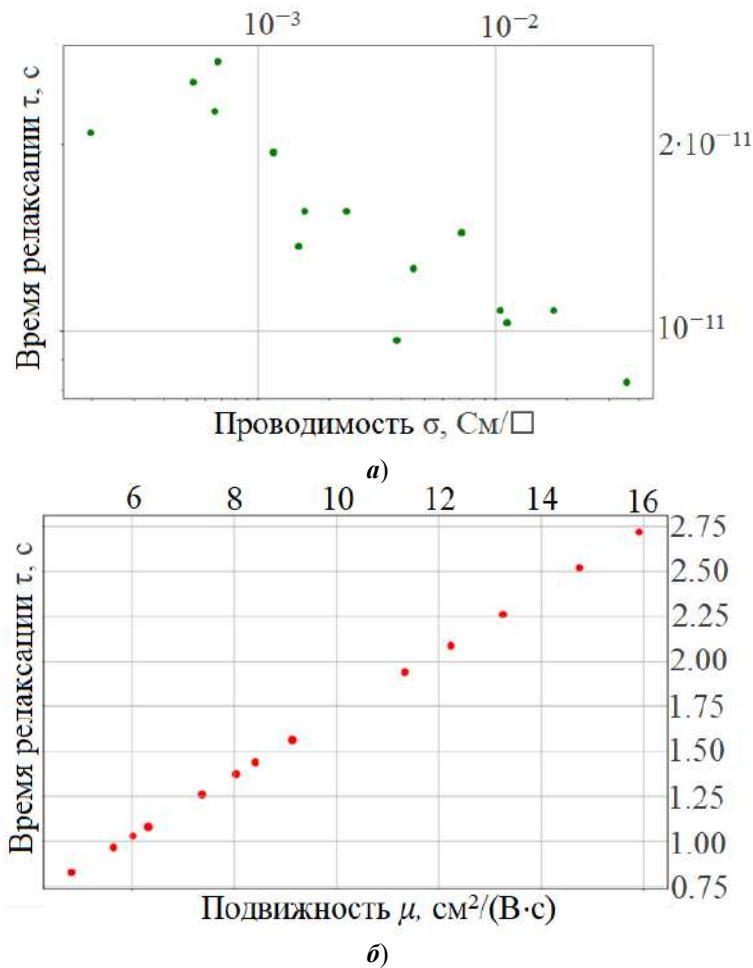


Рис. 2. Графики зависимостей времени релаксации от параметров покрытия:
 а – от проводимости покрытия; б – от подвижности носителей заряда

Для определения того, какая плазменная частота соответствует какой длине волны, использована известная формула:

$$\lambda_p = \frac{c}{f_p}, \quad (9)$$

где c – скорость света.

Полученные результаты расчета плазменной частоты представлены в табл. 3.

Для низких концентраций носителей заряда плазменная частота соответствует инфракрасной области спектра. Материал будет прозрачным для видимого света. Для средних концентраций плазменная частота соответствует ближней инфракрасной и красной части видимого спектра. Материал будет прозрачным для видимого света, но начнет поглощать в ближнем инфракрасном диапазоне. Для высоких концентраций плазменная частота соответствует фиолетовой и ультрафиолетовой областям спектра. Материал будет поглощать видимый свет и станет непрозрачным.

Таблица 3

Результаты расчета плазменной частоты

Образец	$n, \text{см}^{-3}$	$\omega_p, \text{рад/с}$	$f_p, \text{Гц}$	$\lambda_p, \text{нм}$
1	$5,31 \cdot 10^{19}$	$7,51 \cdot 10^{14}$	$1,19 \cdot 10^{14}$	2520
2	$8,11 \cdot 10^{19}$	$9,28 \cdot 10^{14}$	$1,48 \cdot 10^{14}$	2030
3	$3,56 \cdot 10^{20}$	$1,95 \cdot 10^{15}$	$3,10 \cdot 10^{14}$	968
4	$9,04 \cdot 10^{20}$	$3,10 \cdot 10^{15}$	$4,93 \cdot 10^{14}$	609
5	$7,79 \cdot 10^{20}$	$2,88 \cdot 10^{15}$	$4,58 \cdot 10^{14}$	655
6	$2,33 \cdot 10^{21}$	$4,99 \cdot 10^{15}$	$7,94 \cdot 10^{14}$	378
7	$3,7 \cdot 10^{20}$	$1,98 \cdot 10^{15}$	$3,15 \cdot 10^{14}$	952
8	$8,98 \cdot 10^{20}$	$3,08 \cdot 10^{15}$	$4,90 \cdot 10^{14}$	612
9	$1,73 \cdot 10^{21}$	$4,28 \cdot 10^{15}$	$6,81 \cdot 10^{14}$	441
10	$2,15 \cdot 10^{21}$	$4,77 \cdot 10^{15}$	$7,59 \cdot 10^{14}$	395

Также во время исследований методом Ван дер Пау на зонды подавалось напряжение, благодаря этому была рассчитана дрейфовая скорость по формуле

$$v_d = \mu E, \quad (10)$$

где μ – подвижность электронов; E – напряженность электрического поля, при этом $E = \frac{U}{d}$, где U – поданное напряжение, d – расстояние между зондами.

Результаты расчета дрейфовой скорости представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты расчета дрейфовой скорости

Образец	$\mu, \text{см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	$v_d, \text{м/с}, \text{при } E = 0,2 \text{ В/м}$	$v_d, \text{м/с}, \text{при } E = 0,1 \text{ В/м}$
1	8,03	$1,606 \cdot 10^{-4}$	$0,803 \cdot 10^{-4}$
2	9,15	$1,83 \cdot 10^{-4}$	$0,915 \cdot 10^{-4}$
3	9,12	$1,824 \cdot 10^{-4}$	$0,912 \cdot 10^{-4}$
4	8,41	$1,682 \cdot 10^{-4}$	$0,841 \cdot 10^{-4}$
5	6,02	$1,204 \cdot 10^{-4}$	$0,602 \cdot 10^{-4}$
6	7,38	$1,476 \cdot 10^{-4}$	$0,738 \cdot 10^{-4}$
7	6,31	$1,262 \cdot 10^{-4}$	$0,631 \cdot 10^{-4}$
8	6,34	$1,268 \cdot 10^{-4}$	$0,634 \cdot 10^{-4}$
9	4,83	$0,966 \cdot 10^{-4}$	$0,483 \cdot 10^{-4}$
10	5,64	$1,128 \cdot 10^{-4}$	$0,564 \cdot 10^{-4}$

Подвижность является ключевым параметром, определяющим дрейфовую скорость. В материалах с высокой подвижностью ($\text{SnO}_2:\text{Sb}$) электроны движутся быстрее, что приводит к высокой проводимости.

Увеличение напряженности поля (например путем увеличения напряжения или уменьшения расстояния d) приводит к увеличению дрейфовой скорости. Для оптимизации свойств прозрачных проводящих оксидов (например $\text{SnO}_2:\text{Sb}$) необходимо увеличивать подвижность и концентрацию носителей, а также напряженность поля.

Заключение

Теория Друде успешно применена для анализа электрофизических и оптических свойств тонкопленочных покрытий $\text{SnO}_2\text{:Sb}$, полученных методом спрей-пиролиза. Данный теоретический подход позволил установить количественные взаимосвязи между микроскопическими параметрами материала и его макроскопическими свойствами.

Установлены ключевые закономерности для электрических свойств. Проводимость пленок $\text{SnO}_2\text{:Sb}$ варьируется в широком диапазоне в зависимости от концентрации носителей. Подвижность носителей заряда находится в диапазоне от 4,83 до 9,15 $\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, что является хорошим показателем для прозрачных проводящих оксидов. Время релаксации электронов находится в пределах от $8,26 \cdot 10^{-12}$ до $1,56 \cdot 10^{-11}$ с и прямо пропорционально подвижности носителей.

Выявлены важные зависимости оптических характеристик. Плазменная частота материалов находится в диапазоне от $7,51 \cdot 10^{14}$ до $4,99 \cdot 10^{15}$ рад/с. Длина волны плазменного резонанса варьируется от 378 до 2520 нм, что позволяет регулировать оптические свойства материала. Прозрачность покрытий в видимом диапазоне напрямую связана с концентрацией носителей заряда: низкие концентрации обеспечивают высокую прозрачность (>80 %), а высокие концентрации приводят к поглощению в видимой области.

Дрейфовая скорость носителей заряда линейно зависит от напряженности электрического поля. Максимальная дрейфовая скорость достигает $1,83 \cdot 10^{-4}$ м/с при напряженности поля 0,2 В/м. Существует обратная зависимость между концентрацией носителей и их подвижностью, что объясняется увеличением рассеяния при высокой концентрации.

Список литературы

1. Drude P. Zur Elektronentheorie der Metalle // *Annalen der Physik*. 1900. Vol. 306, № 3. P. 566-613. doi: 10.1002/andp.19003060312
2. Ashcroft N. W., Mermin N. D. *Solid State Physics*. Philadelphia : Saunders College, 1976. 848 p.
3. Pecherskayaa E. A., Zinchenko T. O., Golubkova P. E., Karpanina O. V., Gurina S. A., Novichkov M. D. Analysis of the Influence of Technological Parameters on the Properties of Transparent Conductive Oxides // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2024. Vol. 58, № 3. P. 798–806.
4. Pecherskaya E. A., Semenov A. D., Zinchenko T. O., Gurin S. A., Konovalov S. V., Novichkov M. D., Shepeleva A. E., Tuzova D. E. Calculation of the spray supply system characteristics for obtaining film material by spray-pyrolysis // *Vacuum*. 2025. Vol. 234. P. 114100. doi: 10.1016/j.vacuum.2025.114100
5. Gordon R. G. Criteria for Choosing Transparent Conductors // *MRS Bulletin*. 2000. Vol. 25, № 8. P. 52–57. doi: 10.1557/mrs2000.151
6. Ginley D. S., Bright C. Transparent Conducting Oxides // *MRS Bulletin*. 2000. Vol. 25, № 8. P. 15–18. doi: 10.1557/mrs2000.256
7. Chopra K. L., Major S., Pandya D. K. Transparent conductors – A status review // *Thin Solid Films*. 1983. Vol. 102, № 1. P. 1–46. doi: 10.1016/0040-6090(83)90256-0
8. Van der Pauw L. J. A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape // *Philips Research Reports*. 1958. Vol. 13. P. 1–9.
9. Mishra R. L., Sharma S., Suresh R. Antimony doped tin oxide thin films: Electrical and optical properties // *Materials Science in Semiconductor Processing*. 2019. Vol. 93. P. 33–43. doi: 10.1016/j.mssp.2019.01.005

10. Granqvist C. G. Transparent conductors as solar energy materials: A panoramic review // *Solar Energy Materials and Solar Cells*. 2007. Vol. 91, № 17. P. 1529–1598. doi: 10.1016/j.solmat.2007.04.031
11. Das S., Jayaraman V. SnO_2 : A comprehensive review on structures and gas sensors // *Progress in Materials Science*. 2014. Vol. 66. P. 112–255. doi: 10.1016/j.pmatsci.2014.06.003
12. Ginley D. S., Hosono H., Paine D. C. *Handbook of Transparent Conductors*. New York : Springer, 2010. 533 p. doi: 10.1007/978-1-4419-1638-9

References

1. Drude P. Zur Elektronentheorie der Metalle. *Annalen der Physik*. 1900;306(3):566–613. doi: 10.1002/andp.19003060312
2. Ashcroft N.W., Mermin N.D. *Solid State Physics*. Philadelphia: Saunders College, 1976:848.
3. Pecherskaya E.A., Zinchenko T.O., Golubkova P.E., Karpanina O.V., Gurina S.A., Novichkov M.D. Analysis of the Influence of Technological Parameters on the Properties of Transparent Conductive Oxides. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2024;58(3):798–806.
4. Pecherskaya E.A., Semenov A.D., Zinchenko T.O., Gurin S.A., Konovalov S.V., Novichkov M.D., Shepeleva A.E., Tuzova D.E. Calculation of the spray supply system characteristics for obtaining film material by spray-pyrolysis. *Vacuum*. 2025;234:114100. doi: 10.1016/j.vacuum.2025.114100
5. Gordon R.G. Criteria for Choosing Transparent Conductors. *MRS Bulletin*. 2000;25(8):52–57. doi: 10.1557/mrs2000.151
6. Ginley D.S., Bright C. Transparent Conducting Oxides. *MRS Bulletin*. 2000;25(8):15–18. doi: 10.1557/mrs2000.256
7. Chopra K.L., Major S., Pandya D.K. Transparent conductors – A status review. *Thin Solid Films*. 1983;102(1):1–46. doi: 10.1016/0040-6090(83)90256-0
8. Van der Pauw L.J. A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape. *Philips Research Reports*. 1958;13:1–9.
9. Mishra R.L., Sharma S., Suresh R. Antimony doped tin oxide thin films: Electrical and optical properties. *Materials Science in Semiconductor Processing*. 2019;93:33–43. doi: 10.1016/j.mssp.2019.01.005
10. Granqvist C.G. Transparent conductors as solar energy materials: A panoramic review. *Solar Energy Materials and Solar Cells*. 2007;91(17):1529–1598. doi: 10.1016/j.solmat.2007.04.031
11. Das S., Jayaraman V. SnO_2 : A comprehensive review on structures and gas sensors. *Progress in Materials Science*. 2014;66:112–255. doi: 10.1016/j.pmatsci.2014.06.003
12. Ginley D.S., Hosono H., Paine D.C. *Handbook of Transparent Conductors*. New York: Springer, 2010:533. doi: 10.1007/978-1-4419-1638-9

Информация об авторах / Information about the authors

Тимур Олегович Зинченко

кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры информационно-измерительной техники и метрологии, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: scar0243@gmail.com

Timur O. Zinchenko

Candidate of engineering sciences, senior lecturer of the sub-department of information and measuring technology and metrology, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Екатерина Анатольевна Печерская

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой информационно-
измерительной техники и метрологии,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: peal@list.ru

Владимир Дмитриевич Кревчик

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физики, декан факультета
информационных технологий
и электроники, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

Сергей Валерьевич Коновалов

доктор технических наук, профессор,
проректор по научной и инновационной
деятельности, Сибирский
государственный индустриальный
университет (Россия, Кемеровская
область – Кузбасс, г. Новокузнецк,
ул. Кирова, 42); ведущий научный
сотрудник научно-производственной
лаборатории «Полет» кафедры
информационно-измерительной
техники и метрологии, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: konovalov@sibsiu.ru

Дмитрий Владимирович Артамонов

доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры автономных
информационных и управляющих
систем, первый проректор университета,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: dva@pnzgu.ru

Сергей Александрович Гурин

кандидат технических наук, старший
научный сотрудник научно-
производственной лаборатории «Полет»
кафедры информационно-измерительной
техники и метрологии, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: teslananoel@rambler.ru

Ekaterina A. Pecherskaya

Doctor of engineering sciences, professor,
head of the sub-department of information
and measuring technology and metrology,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Vladimir D. Krevchik

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of physics, dean of the
faculty of information technology
and electronics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Sergey V. Konovalov

Doctor of engineering sciences, professor,
vice rector for research and innovation,
Siberian State Industrial University
(42 Kirova street, Novokuznetsk,
Kemerovo region – Kuzbass, Russia);
leading researcher at SPL “Polet”
of the sub-department of information
and measuring technology and metrology,
Penza State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Dmitry V. Artamonov

Doctor of engineering sciences, professor,
professor of the sub-department
of autonomous information and control
systems, first vice-rector,
Penza State University (40 Krasnaya
street, Penza, Russia)

Sergey A. Gurin

Candidate of engineering sciences,
senior researcher at SPL “Polet”
of the sub-department of information
and measuring technology and metrology,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Максим Дмитриевич Новичков

аспирант, младший научный сотрудник
научно-производственной лаборатории
«Полет» кафедры информационно-
измерительной техники и метрологии,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: novichkov1998maks@gmail.com

Maksim D. Novichkov

Postgraduate student, junior research
assistant at SPL “Polet” of the
sub-department of information
and measuring technology and metrology,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Александр Макиевский

кандидат наук, научный директор,
SINTERFACE Technologies
(Германия, г. Берлин,
ул. Mueggelseedamm, 70)

E-mail: a.makievski@sinterface.com

Alexander Makievski

Candidate of sciences, scientific director
of company, SINTERFACE Technologies
(70 Mueggelseedamm, 12587 Berlin,
Germany)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 02.04.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 26.04.2025

Принята к публикации / Accepted 10.05.2025

УДК 519.8

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-8

Исследование теплообмена и магнитной гидродинамики при течении жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами

С. В. Соловьев

Вычислительный центр Дальневосточного отделения

Российской академии наук, Хабаровск, Россия

solovjovsv@rambler.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Исследования течения вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами (известного как течение Куэтта), как экспериментальные, так и теоретические, актуальны до настоящего времени и находят широкое применение в технических приложениях (теплообменные аппараты, атомные и химические реакторы, сепараторы, астрофизика). Данный класс задач усложняется, когда наряду с гидродинамикой имеет место теплообмен вязкой жидкостью. Степень сложности таких задач возрастает при совместном рассмотрении теплообмена и течения вязкой электропроводной жидкости между вращающимися с разной угловой скоростью цилиндрами. Для изучения и более глубокого понимания таких сложных процессов необходимы дальнейшие исследования, которые послужат уточнению математических моделей теплообмена и магнитной гидродинамики. Рассматривается теплообмен и магнитная гидродинамика жидкости (при заданном поле скорости) между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами. Целью работы является исследование влияния угловых скоростей вращения цилиндров, диссипации джоулева тепла, внутренних источников/стоков тепла, толщины цилиндрического слоя и магнитного числа Рейнольдса на поля температуры и магнитной индукции жидкости в цилиндрическом слое. *Материалы и методы.* Задача теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости решается численно методом контрольного объема (Патанкара) в цилиндрической системе координат. *Результаты.* Исследовано влияние поля скорости, внутренних источников/стоков тепла, диссипации джоулевой теплоты, толщины цилиндрического слоя на поля температуры, радиальной и угловой составляющих магнитной индукции электропроводной жидкости между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами. Установлено, что изменение направления вращения цилиндров приводит к изменению вида экстремума угловой составляющей магнитной индукции. Уменьшение магнитного числа Рейнольдса увеличивает интенсивность теплообмена в жидкости. *Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы как при исследовании тепловых и магнитогидродинамических процессов, так и проектировании энергетических и химических аппаратов, сепараторов, приборов и установок.

Ключевые слова: математическое моделирование, конвективный теплообмен, магнитная гидродинамика, диссипация джоулевой теплоты, цилиндрический слой

Для цитирования: Соловьев С. В. Исследование теплообмена и магнитной гидродинамики при течении жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 93–109. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-8

Research of heat transfer and magnetohydrodynamics in the flow of liquid between two coaxial cylinders

© Соловьев С. В., 2025. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

S.V. Solov'ev

Computing Center of Far Eastern Branch
of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia
solovjovsv@rambler.ru

Abstract. *Background.* Studies of viscous fluid flow between rotating cylinders (known as the Couette flow), both experimental and theoretical, are still relevant and are widely used in technical applications (heat exchangers, nuclear and chemical reactors, separators, astrophysics). This class of problems becomes more complicated when heat exchange takes place along with hydrodynamics. The complexity of such problems increases with a joint consideration of heat exchange and the flow of viscous conductive fluid between cylinders rotating with different angular velocities. Further research is needed to study and better understand such complex processes, which will serve to clarify the mathematical models of heat exchange and magnetohydrodynamics. The paper considers heat exchange and magnetohydrodynamics of fluid (for a given velocity field) between two rotating coaxial cylinders. The purpose of the work is to study the influence of angular velocities of cylinder rotation, Joule heat dissipation, internal heat sources/sinks, cylindrical layer thickness and magnetic Reynolds number on the temperature and magnetic induction fields of liquid in the cylindrical layer. *Materials and methods.* In dimensionless form, the problem of heat exchange and flow of electrically conductive liquid between two rotating cylinders is solved numerically in a cylindrical coordinate system. The control volume method (Patankar method) is used to solve the problem. *Results.* The influence of the velocity field, internal heat sources/sinks, Joule heat dissipation, cylindrical layer thickness on the temperature fields, radial and angular components of the magnetic induction of an electrically conducting liquid between two coaxial rotating cylinders is investigated. It is found that changing the direction of rotation of the cylinders leads to a change in the type of extremum of the angular component of magnetic induction. Reducing the magnetic Reynolds number increases the intensity of heat exchange in the liquid. *Conclusions.* The results obtained can be used both in the study of thermal and magnetohydrodynamics processes and in the design of power and chemical devices, separators, instruments and installations.

Keywords: mathematical modeling, convective heat exchange, magnetohydrodynamics, Joule heat dissipation, cylindrical layer

For citation: Solov'ev S.V. Research of heat transfer and magnetohydrodynamics in the flow of liquid between two coaxial cylinders. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):93–109. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-8

Введение

Задачи магнитной гидродинамики имеют большое значение и находят широкое применение в различных областях физики, магнитногидродинамических генераторах, атомной промышленности и астрофизики [1–12]. Одним из классов задач гидродинамики является исследование движения жидкости между вращающимися цилиндрами (течение Куэтта), которое имеет большое значение в технических установках, например в тепловых генераторах, где наличие вязкости жидкости, движущейся между двумя вращающимися цилиндрами, приводит к диссипации энергии, переходящей в тепло. Эта задача усложняется, если рассматривается электропроводная жидкость. В этом случае к энергии диссипации, связанной с вязкостью жидкости, добавляется энергия диссипации, связанная с электрической проводимостью жидкости (джоулево тепло) [13]. И эта суммарная энергия переходит в тепло. Задачи

магнитной гидродинамики становятся еще более сложными, когда приходится учитывать процессы теплообмена. В этом случае математический аппарат магнитной гидродинамики составляют уравнения электродинамики, энергии и уравнения движения электропроводной среды, в которых учитываются все действующие силы. Аналитическое решение таких уравнений представляет собой довольно сложную задачу, поэтому применение численных методов является актуальным.

Целью настоящей работы является исследование путем математического моделирования уравнений магнитной гидродинамики и теплообмена электропроводящей жидкости, заключенной между двумя вращающимися вокруг своей оси коаксиальными бесконечными (по оси z) цилиндрами с заданным полем скорости (рассматривается кинематическая модель).

Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи в безразмерной форме, описывающая теплообмен электропроводной жидкостью между двумя коаксиальными цилиндрами с учетом внутренних, равномерно распределенных объемных источников/стоков тепла, и диссипации джоулевой теплоты, описывается системой уравнений магнитной индукции и теплообмена:

$$\frac{\partial B}{\partial Fo} = \text{rot}(V \times B)Pe + Pr_m \Delta B, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe (V \nabla) \theta = \Delta \theta + Q_v + \frac{Ha^2 \cdot Ec \cdot Pr}{Re_m^2} (\text{rot } B)^2, \quad (2)$$

которая может быть представлена в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных в цилиндрической системе координат r, φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial Fo} = Pe \left[B_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - V_r \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right] + \\ + Pr_m \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\varphi}{\partial Fo} = Pe \left[B_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - V_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \\ + Pr_m \left(\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe \left(V_r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + Q_v + \frac{Ha^2 \cdot Ec \cdot Pr}{Re_m^2} \times \\ \times \left[\frac{B_\varphi^2}{r^2} + \left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{2B_\varphi}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{2}{r} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \frac{B_\varphi}{r} + \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для составляющих магнитной индукции и температуры на внутренней и наружной поверхности цилиндров задавались граничные условия первого рода:

$$B|_{r_1}, B|_{r=1} = \text{const}, B_\varphi|_{r_1} = B_\varphi|_{r=1} = \text{const}, \theta|_{r_1}, \theta|_{r=1} = \text{const}.$$

На оси симметрии выполнялись условия:

$$\left. \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi} = \left. \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi} = 0, \left. \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi} = 0.$$

В качестве начальных условий задавались нулевые значения составляющих магнитной индукции и температуры. При записи уравнений (1)–(5) приняты следующие обозначения: B_r , B_φ , $\theta = (T - T_2) / (T_1 - T_2)$, $Q_V = q_V R_2^2 / \lambda (T_1 - T_2)$ – радиальная и угловая составляющие магнитной индукции, температура и внутренний объемный источник/сток тепла; $Fo = at / R_2^2$, $Re_m = V_0 R_2 / \nu_m$, $Re = V_0 R_2 / \nu$, $Pr_m = \nu_m / a$, $Pr = \nu / a$, $Pe = Re \cdot Pr$, $Ec = V_0^2 / c_p (T_1 - T_2)$, $Ha = B_0 R_2 \sqrt{\sigma / \eta}$ – числа Фурье, магнитные и динамические числа Рейнольдса и Прандтля, Пекле, Эккерта и Гартманна; R_1 , R_2 – размерные радиусы внутреннего и внешнего цилиндров, $r = R / R_2$, $r_1 = R_1 / R_2$; V_0 – масштаб скорости. Численное решение задачи осуществлялось методом контрольного объема [14]. Фрагмент контрольного объема приведен на рис. 1.

Проинтегрировав дифференциальные уравнения (3)–(5) по всем контрольным объемам, получим систему дискретных аналогов.

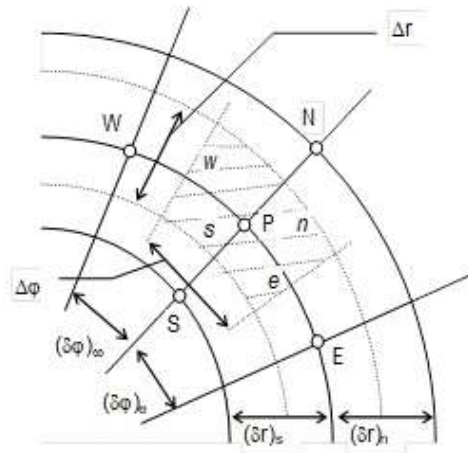


Рис. 1. Фрагмент сетки контрольного объема

Для магнитной индукции имеем:

$$a_P B_r^P = a_E B_r^E + a_W B_r^W + a_S B_r^S + a_N B_r^N + a,$$

$$\begin{aligned}
a_E &= -Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{Pr_m}{(\delta\phi)_e}, \quad a_W = Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{Pr_m}{(\delta\phi)_\omega}, \\
a_N &= Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{Pr_m r_P \Delta\phi}{(\delta r)_n} + \frac{Pr_m \Delta\phi}{2}, \quad a_S = \frac{r_P \Delta\phi Pr_m}{(\delta r)_s} - \frac{\Delta\phi Pr_m}{2}, \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - Pe(V_r^e - V_r^\omega) r_P \Delta\phi + \frac{Pr_m \Delta r \Delta\phi}{r_P} + b_P^0, \\
a &= b_P^0 B_r^P - 2 \frac{Pr_m \Delta r}{r_P} (B_\phi^e - B_\phi^\omega) + Pe \cdot B_\phi^P (V_r^e - V_r^\omega) r_P \Delta\phi; \\
b_P B_\phi^P &= b_E B_\phi^E + b_W B_\phi^W + b_S B_\phi^S + b_N B_\phi^N + b, \\
b_E &= -Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{Pr_m}{(\delta\phi)_e}, \quad b_W = Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{Pr_m}{(\delta\phi)_\omega}, \\
b_N &= -Pe \frac{V_\phi^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{\Delta\phi Pr_m}{2} + \frac{r_P \Delta\phi Pr_m}{2(\delta r)_n}, \\
b_S &= Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{r_P \Delta\phi Pr_m}{(\delta r)_s} - \frac{\Delta\phi Pr_m}{2}, \\
b_P &= b_E + b_W + b_N + b_S - Pe \Delta r (V_\phi^e \Delta\phi + (V_\phi^e - V_\phi^\omega)) + \frac{\Delta\phi \Delta r Pr_m}{r_P} + b_P^0, \\
b &= b_P^0 + Pe \Delta\phi B_r^P (r_P (V_\phi^n - V_\phi^s) - V_\phi^P \Delta r) + 2 \frac{\Delta r Pr_m}{r_P} (B_r^e - B_r^\omega).
\end{aligned}$$

Для температуры имеем:

$$\begin{aligned}
c_P \theta^P &= c_E \theta^E + c_W \theta^W + c_S \theta^S + c_N \theta^N + c, \\
c_E &= -Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{1}{(\delta\phi)_e}, \quad c_W = Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{1}{(\delta\phi)_\omega} - \frac{\Delta\phi}{2}, \\
c_N &= -Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{r_P \Delta\phi}{(\delta r)_n} + \frac{\Delta\phi}{2}, \quad c_S = Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{r_P \Delta\phi}{(\delta r)_s} - \frac{\Delta\phi}{2}, \\
c_P &= c_E + c_W + c_N + c_S + b_P^0, \\
c &= b_P^0 + Q_V r_P \Delta r \Delta\phi + \frac{Ha^2 \cdot Ec \cdot Pr}{Re_m^2} \left[2 B_r^P \Delta\phi (B_\phi^n - B_\phi^s) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2B_{\varphi}^P (B_r^e - B_r^{\omega}) \frac{\Delta r}{r_P} + (B_{\varphi}^P)^2 \frac{\Delta r \Delta \varphi}{r_P} + r_P^2 \Delta \varphi \left(\frac{(B_{\varphi}^n - B_{\varphi}^s)^2}{\Delta r} \right) + \\
 & + \frac{\Delta r (B_r^e - B_r^{\omega})}{r_P \Delta \varphi} (B_r^e - B_r^{\omega}) - 2(B_r^e - B_r^{\omega})(B_{\varphi}^n - B_{\varphi}^s) \Big], \\
 & B_{\varphi}^{\omega} = \frac{B_{\varphi}^W + B_{\varphi}^P}{2}, \quad B_{\varphi}^e = \frac{B_{\varphi}^E + B_{\varphi}^P}{2}, \quad B_{\varphi}^n = \frac{B_{\varphi}^N + B_{\varphi}^P}{2}, \quad B_{\varphi}^s = \frac{B_{\varphi}^S + B_{\varphi}^P}{2}, \\
 & B_r^{\omega} = \frac{B_r^W + B_r^P}{2}, \quad B_r^e = \frac{B_r^E + B_r^P}{2}, \quad V_{\varphi}^n = \frac{V_{\varphi}^N + V_{\varphi}^P}{2}, \quad V_{\varphi}^s = \frac{V_{\varphi}^S + V_{\varphi}^P}{2}, \\
 & V_{\varphi}^{\omega} = \frac{V_{\varphi}^W + V_{\varphi}^P}{2}, \quad V_{\varphi}^e = \frac{V_{\varphi}^E + V_{\varphi}^P}{2}, \quad b_P^0 = \frac{r_P \Delta r \Delta \varphi}{\Delta F o}, \\
 & V_r^e = \frac{V_r^E + V_r^P}{2}, \quad V_r^{\omega} = \frac{V_r^W + V_r^P}{2}, \quad V_r^n = \frac{V_r^N + V_r^P}{2}, \quad V_r^s = \frac{V_r^S + V_r^P}{2}.
 \end{aligned}$$

Для решения системы дискретных аналогов использовался метод Зейделя. Вычисления прекращались при достижении заданной степени точности 10^{-7} .

В качестве кинематической модели, когда внутренний и внешний цилиндры вращаются с разными угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 , принято следующее распределение скорости жидкости [15]:

$$V_z = V_r = 0, \quad V_{\varphi} = \left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1 r_1^2}{1 - r_1^2} R_2 r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1}{1 - r_1^2} \frac{r_1}{r} \right) / V_0.$$

На рис. 2–9 приведены поля скорости течения жидкости, магнитной индукции и температуры при граничных условиях вида

$$B_r|_{r_1} = B_r|_{r=1} = 1, \quad B_{\varphi}|_{r_1} = B_{\varphi}|_{r=1} = 0, \quad \theta|_{r_1} = 1, \quad \theta|_{r=1} = 0.$$

Результаты

На рис. 2 приведены результаты расчетов для стационарного режима с учетом диссипации джоулевой теплоты, когда внутренний и внешний цилиндры вращаются с угловыми скоростями $\Omega_1 = -1$ и $\Omega_2 = 1$ соответственно. Расчеты выполнены для следующих значений критериев подобия $Pe = Pr_m = Pr = Ha = Ec = 1$, $Re_m = 0,1$, $Q_v = 0$, $r_1 = 0,5$ ($R_1 = 1$, $R_2 = 2$).

На рис. 2,а приведено поле скорости течения жидкости в цилиндрическом слое. Вблизи внутренней границы слоя жидкость движется по направлению часовой стрелки, а вблизи внешней границы – по направлению против часовой стрелки.

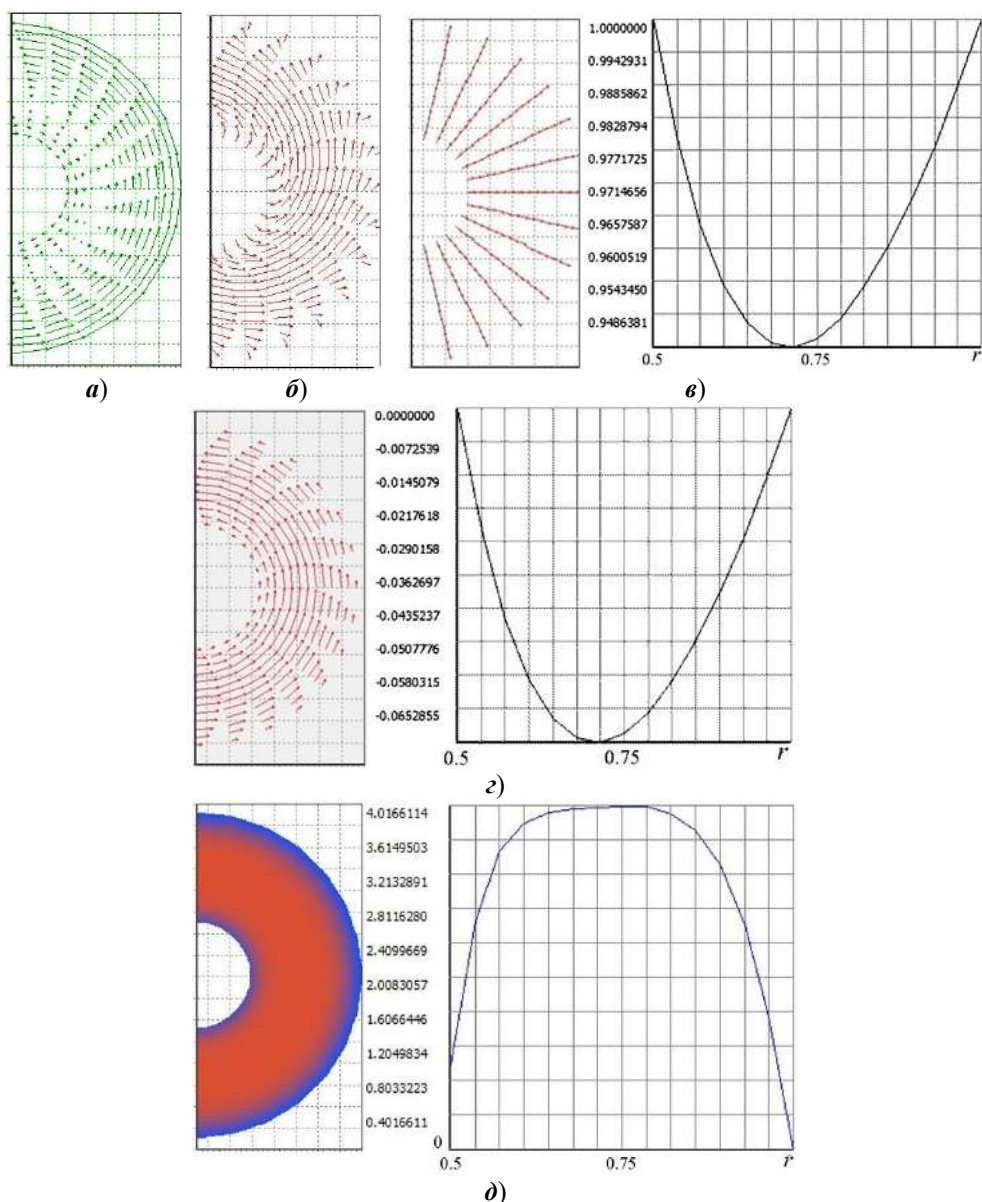


Рис. 2. Поля скорости (а), магнитной индукции (б), радиальной (в) и угловой (г) составляющих магнитной индукции, температуры (д)

На рис. 2,б приведено поле магнитной индукции (сумма радиальной и угловой составляющих магнитной индукции $\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\phi \mathbf{e}_\phi$). Векторы магнитной индукции («магнитные стрелки») направлены по направлению против часовой стрелки (рис. 2,б). Поля и распределения радиальной и угловой составляющих магнитной индукции представлены на рис. 2,в,г. Векторы радиальной составляющей магнитной индукции направлены по радиусу от внутренней границы цилиндрического слоя жидкости к наружной (рис. 2,в). Векторы угловой составляющей магнитной индукции направлены по направлению против часовой стрелки (рис. 2,г). Профили распределений радиальной и угловой составляющих магнитной индукции (рис. 2,в,г) параболические,

причем минимумы величин B_r и B_ϕ расположены при $r \approx 0,7$. Значения радиальной составляющей магнитной индукции положительные, находятся в узком интервале $B_r \in [0,948; 1]$ (рис. 2,б). Значения угловой составляющей магнитной индукции отрицательные (рис. 2,г). Из сравнения полей индукции (рис. 2,б) и ее угловой составляющей (рис. 2,г) можно заметить, что различие между ними незначительное. Данный факт свидетельствует о малом влиянии поля радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 2,б) на поле индукции (рис. 2,б).

На рис. 2,д показано поле и распределение температуры. Теплообмен в жидкости осуществляется теплопроводностью. Учет диссипации джоулевой теплоты увеличивает интенсивность теплообмена в жидкости, что приводит к возрастанию ее температуры до максимального значения $\theta_{\max} = 4,017$. Практически во всей расчетной области температура жидкости превышает значение $\theta > 1$ (выделено красным цветом) и лишь в окрестности внешней поверхности цилиндрического слоя жидкости ее температура $\theta < 1$ (выделено синим цветом).

На рис. 3 приведены поле и распределение температуры в слое жидкости для условий рис. 2, но без учета диссипации джоулевой теплоты и при $Q_v = 0, \pm 20$.

Для всех трех режимов перенос тепла в жидкости происходит теплопроводностью. Неучет диссипации джоулевой теплоты приводит к изменению поля и распределения температуры (рис. 3,а) по сравнению с результатом, представленным на рис. 2,д. В этом случае (рис. 3,а) температура жидкости не превосходит максимального значения $\theta_{\max} = 1$. Значительная часть поля температуры жидкости (выделено синим цветом) имеет температуру из интервала $0 \leq \theta < 1$, и лишь вблизи поверхности внутреннего цилиндра поле температуры (окрашено в оттенки красного цвета) имеет температуру жидкости $\theta \leq 1$. При учете внутренних источников тепла ($Q_v = 20$, рис. 3,б) максимальное значение температуры жидкости $\theta_{\max} = 1,181$. В случае внутренних стоков тепла ($Q_v = -20$, рис. 3,в) температура жидкости принимает как отрицательные, так и положительные значения, а ее минимальная температура $\theta_{\min} = -0,278$. При учете внутренних источников/стоков тепла профиль температуры параболический с максимумом для $Q_v = 20$ (рис. 3,б) и с минимумом для $Q_v = -20$ (рис. 3,в). Оказалось, что поля магнитной индукции и ее составляющих качественно и количественно аналогичны результатам рис. 2,б,в,г.

На рис. 4 приведены результаты расчетов для условий рис. 2, за исключением значений угловых скоростей: $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = -1$. Изменение угловых скоростей на противоположные, по сравнению с режимом рис. 2, приводит к изменению поля скорости (рис. 4,а), магнитной индукции и ее угловой составляющей (рис. 4,б,в).

Векторы индукции и ее угловой составляющей (рис. 4,б,в) направлены по часовой стрелке, в отличие от результатов, показанных на рис. 2,б,г. Профиль распределения угловой составляющей магнитной индукции B_ϕ (рис. 4,в) параболический, имеющий максимум (при $r \approx 0,7$), а не минимум, как в случае результата, приведенного на рис. 2,г. Изменение угловых скоро-

стей привело к изменению отрицательных значений B_φ (рис. 2,з) на положительные (рис. 4,в). Оказалось, что поля и распределения температуры и радиальной составляющей магнитной индукции качественно и количественно аналогичны результатам рис. 2,д,в.

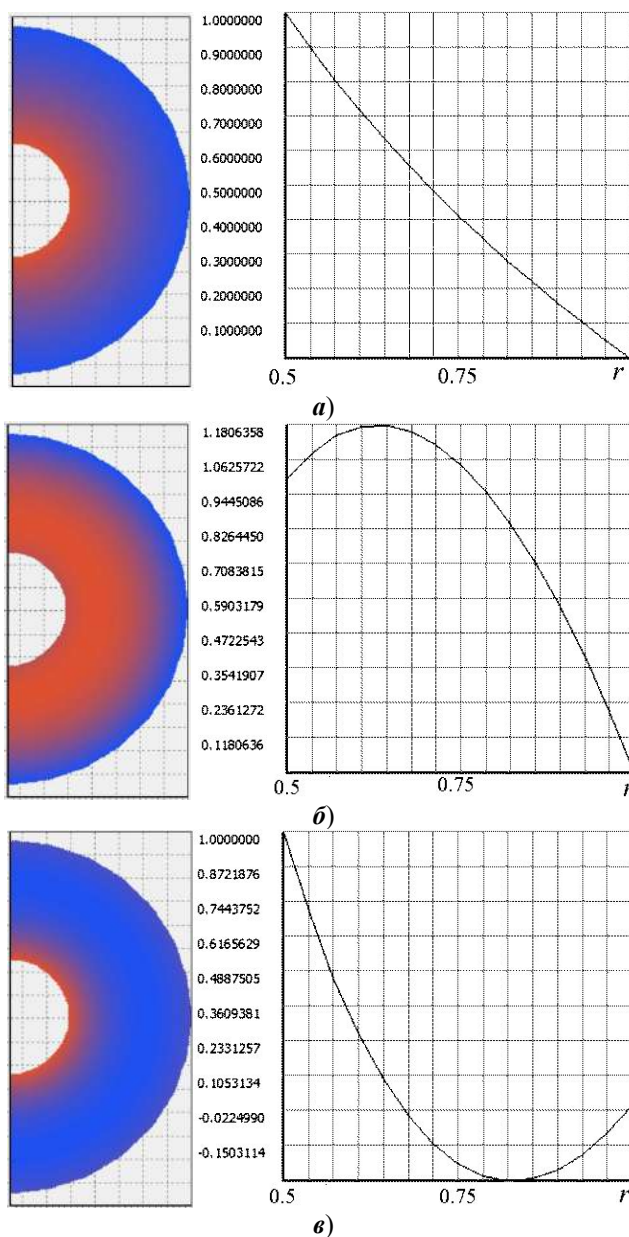


Рис. 3. Поле и распределение температуры: а – $Q_v = 0$; б – $Q_v = 20$; в – $Q_v = -20$

На рис. 5,а,б представлены поля скорости и магнитной индукции. Увеличение скорости вращения цилиндров в два раза привело к возрастанию значений угловой составляющей магнитной индукции (рис. 5,в) практически в два раза по сравнению с результатом, представленным на рис. 2,з. Поле и распределение радиальной составляющей магнитной индукции не измени-

лись и аналогичны результатам рис. 2, в. Температура жидкости (рис. 5, з) увеличивается в 3,7 раза по сравнению с результатом, приведенным на рис. 2, д, достигнув своего максимального значения $\theta_{\max} \approx 15$.

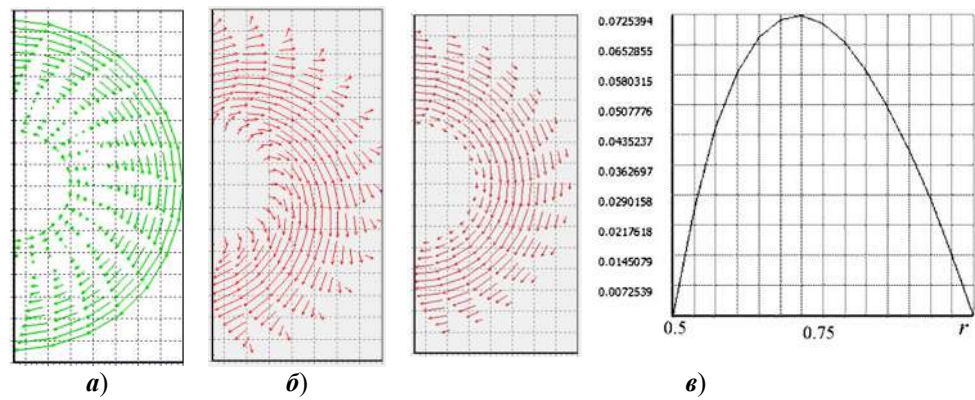


Рис. 4. Поля скорости (а), магнитной индукции (б), угловой составляющей магнитной индукции (в)

На рис. 5 приведены результаты расчетов для условий рис. 2 за исключением значений угловых скоростей: $\Omega_1 = -2$ и $\Omega_2 = 2$.

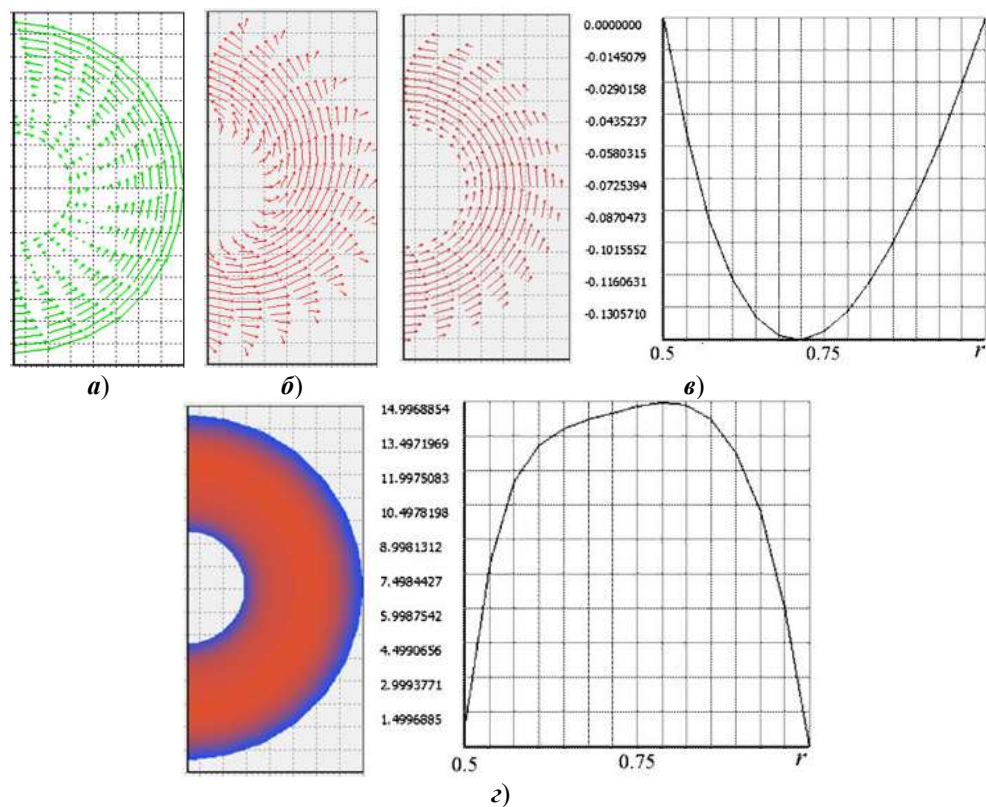


Рис. 5. Поля скорости (а), магнитной индукции (б), угловой составляющей магнитной индукции (в), температуры (з)

На рис. 6 приведены результаты расчетов для условий режима, приведенного на рис. 2, когда $Re_m = 0,05$ и $0,2$.

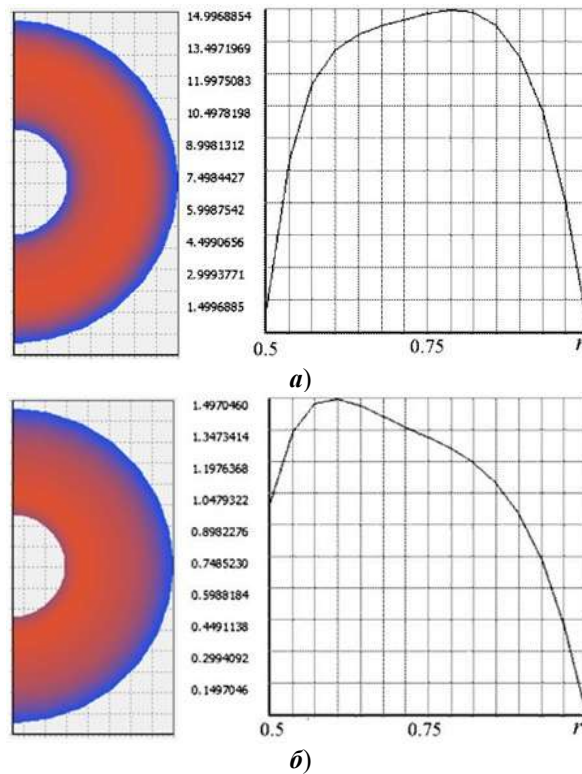


Рис. 6. Поле и распределение температуры: *a* – $Re_m = 0,05$; *б* – $Re_m = 0,2$

Уменьшение значения магнитного числа Рейнольдса в два раза (рис. 6,*a*) по сравнению с режимом, приведенным на рис. 2,*д*, приводит к увеличению интенсивности теплообмена в жидкости за счет возрастания вклада диссипации джоулевой теплоты. При этом максимальная температура жидкости увеличивается в 3,8 раза (рис. 6,*a*) до значения $\theta_{\max} \approx 15$ по сравнению с режимом, показанным на рис. 2,*д*. Увеличение значения магнитного числа Рейнольдса в два раза (рис. 6,*б*) по сравнению с режимом, приведенным на рис. 2,*д*, приводит к снижению интенсивности теплообмена в жидкости за счет уменьшения вклада диссипации джоулевой теплоты. При этом максимальная температура жидкости уменьшается в 2,7 раза (рис. 6,*б*) до значения $\theta_{\max} \approx 1,5$ по сравнению с режимом, представленным на рис. 2,*д*. Поля составляющих магнитной индукции и суммарной магнитной индукция качественно и количественно аналогичны результатам рис. 2,*б,в,г*.

На рис. 7 приведены результаты расчетов для условий режима, приведенного на рис. 2, когда внешний цилиндр не вращается ($\Omega_2 = 0$), а внутренний цилиндр вращается со скоростью $\Omega_1 = -1$.

В расчетной области жидкость движется по направлению часовой стрелки (рис. 7,*a*). Поле магнитной индукции и ее угловой составляющей представлено на рис. 7,*б,в*. Задание $\Omega_2 = 0$ (условие прилипания жидкости на

поверхности внешнего цилиндра) приводит к уменьшению в 2,7 раза максимальной температуры жидкости $\theta_{\max} = 1,497$ (рис. 7,з) по сравнению с результатом, приведенным на рис. 2,з,д ($\theta_{\max} = 4,017$). Распределение температуры жидкости (рис. 7,з) достигает своего максимального значения $\theta_{\max} = 1,497$ при $r \approx 0,61$. Поле и распределение радиальной составляющей магнитной индукции качественно и количественно аналогично результату, представленному на рис. 2,в.

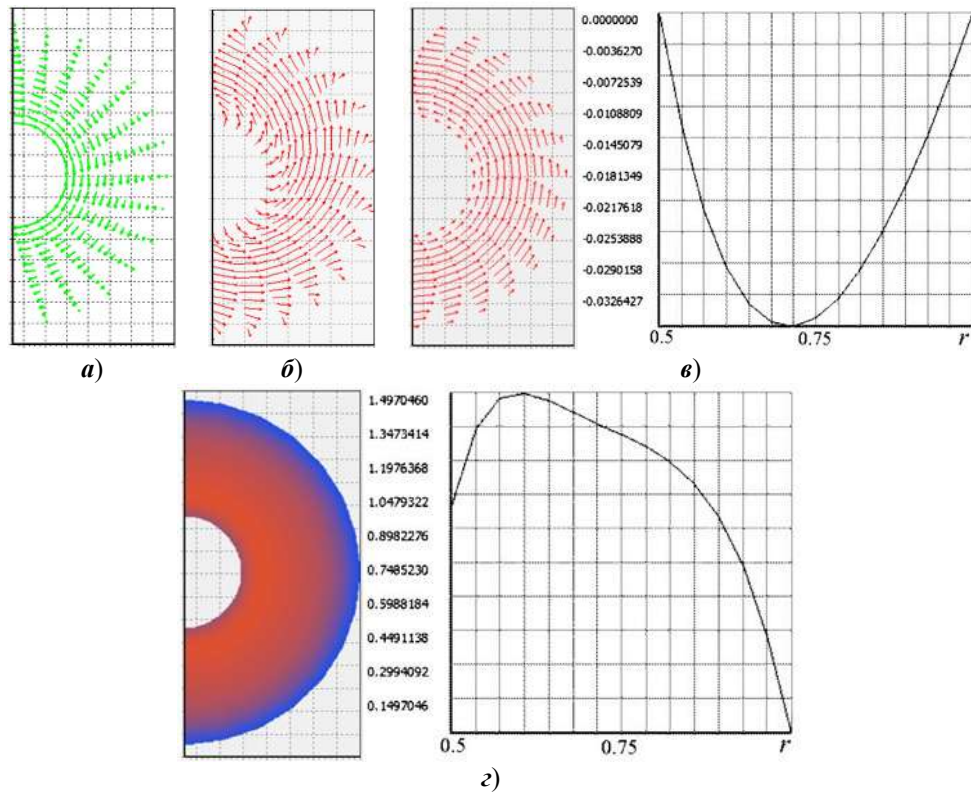


Рис. 7. Поля скорости (а), магнитной индукции (б), угловой составляющей магнитной индукции (в), температуры (з)

На рис. 8 приведены результаты расчетов для условий режима, приведенного на рис. 2, но для $r_1 = 1/3$ ($R_1 = 1$, $R_2 = 3$).

Увеличение толщины цилиндрического слоя в полтора раза по сравнению с режимом, представленным на рис. 2, приводит к незначительному качественному отличию распределения температуры (рис. 8,д) от результата рис. 2,д и к уменьшению максимального значения температуры ($\theta_{\max} = 2,032$, рис. 8,д) практически в два раза ($\theta_{\max} = 4,017$, рис. 2,д). Максимум температуры (рис. 8,д) расположен при $r \approx 0,48$. Оказалось, что поля скорости, магнитной индукции и ее составляющих (рис. 8,а,б,в,з) качественно аналогичны соответствующим полям, представленным на рис. 2.

На рис. 9 представлены результаты расчетов для условий режима, приведенного на рис. 2, при $r_1 = 0,25$ ($R_1 = 1$, $R_2 = 4$).

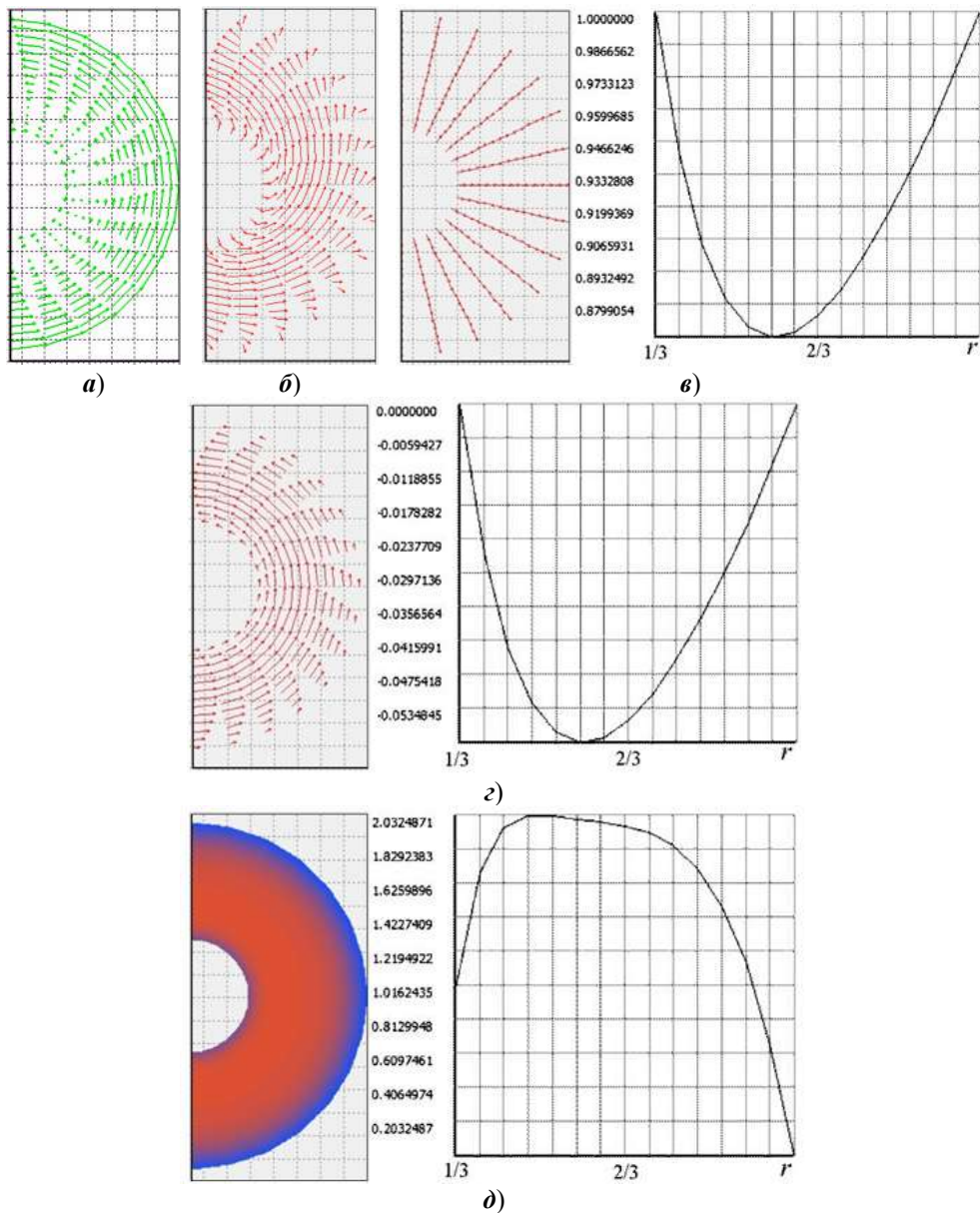


Рис. 8. Поля скорости (а), магнитной индукции (б), радиальной (е) и угловой (з) составляющих магнитной индукции, температуры (д)

При дальнейшем увеличении толщины цилиндрического слоя по сравнению с результатами, приведенными на рис. 8, имеет место изменение распределения температуры (рис. 9, д). Максимальное значение температуры жидкости $\theta_{\max} = 1,298$ (рис. 9, д) уменьшается примерно в 1,6 раза по сравнению с результатом, приведенным на рис. 8, д ($\theta_{\max} = 2,032$). Максимум температуры (рис. 9, д) расположен при $r \approx 0,32$. Поля скорости, магнитной индукции, радиальной и угловой составляющих магнитной индукции (рис. 9, а, б, в, з) качественно аналогичны соответствующим полям, представленным на рис. 8.

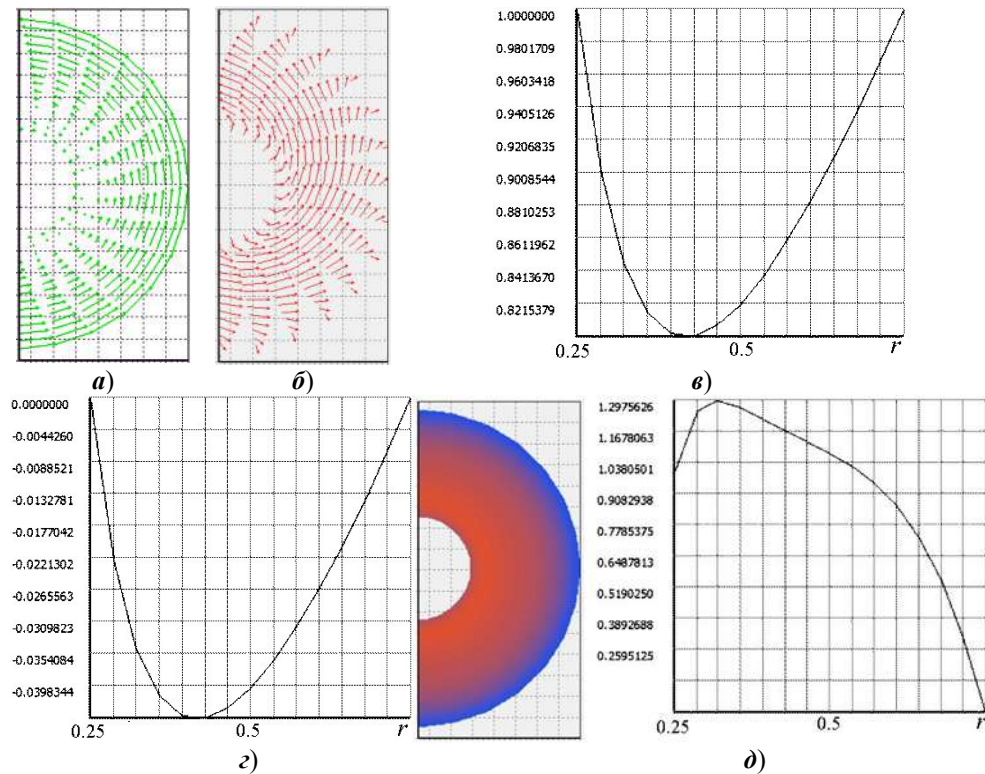


Рис. 9. Поля скорости (а), магнитной индукции (б), радиальной (в) и угловой (г) составляющих магнитной индукции, температуры (д)

Заключение

Предложена математическая модель теплообмена электропроводной жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами. Проведен вычислительный эксперимент, результаты которого позволяют сделать следующие выводы:

1. Изменение направления вращения цилиндров приводит к изменению типа экстремума (с минимума на максимум) угловой составляющей магнитной индукции. Увеличение скорости вращения цилиндров приводит к росту температуры жидкости. При увеличении толщины цилиндрического слоя максимальная температура жидкости снижается, а положение максимума $\theta_{\max}$ сдвигается в сторону внутреннего цилиндра: при $r_1 = 1/3$, $\theta_{\max} = 2,032$, $r_{\max} \approx 0,48$; при $r_1 = 0,25$, $\theta_{\max} = 1,298$, $r_{\max} \approx 0,32$).

2. При уменьшении магнитного числа Рейнольдса вклад диссипации джоулевой теплоты возрастает, интенсифицируя теплообмен в жидкости. При увеличении магнитного числа Рейнольдса ситуация противоположная. Учет внутренних источников/стоков тепла (без учета диссипации джоулевой теплоты) практически не оказывает влияния на поле магнитной индукции и ее составляющих.

3. Для всех рассмотренных режимов поле радиальной составляющей магнитной индукции B_r качественно сохраняется. Количественные изменения B_r связаны с толщиной цилиндрического слоя. Установлено, что интервал

значений B_r уменьшается с увеличением толщины цилиндрического слоя: $B_r \in [0,943; 1]$ при $r_1 = 0,5$; $B_r \in [0,866; 1]$ при $r_1 = 1/3$; $B_r \in [0,802; 1]$ при $r_1 = 0,25$.

Математическая модель и полученные результаты могут быть применены при исследовании магнитогидродинамических и тепловых процессов на этапе проектирования энергетических и химических установок, сепараторов, аппаратов и приборов, создании новых моделей и расширении знаний о теплообмене электропроводной жидкости.

Список литературы

1. Elkhazen M. I., Hassen W., Gannoun R., Hussein A. K. and Borjini M. N. Numerical study of electroconvection in a dielectric layer between two cofocal elliptical cylinders subjected to unipolar injection // Journal of engineering physics and thermophysics. 2019. Vol. 92, № 5. P. 2358–2370.
2. Кашевский С. Б., Кашевский Б. Э., Худoley А. Л. Экспериментальная модель для исследования динамики магнитных дисперсий в градиентном магнитном поле // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 1. С. 184–194.
3. Ahmed N. Heat and mass transfer in MHD poiseuille flow with porous walls // Journal of engineering physics and thermophysics. 2019. Vol. 92, № 1. P. 128–137.
4. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. Магнитная гидродинамика и теплоперенос во вращающихся потоках // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92, № 1. С. 174–181.
5. Федоров С. В. Усиление магнитного поля в струйных течениях проводящих материалов: соударение двух струй с магнитным полем // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 3. С. 675–685.
6. Belabid J. Hydromagnetic natural convection from a horizontal porous annulus with heat generation or absorption // Journal of engineering physics and thermophysics 2021. Vol. 94, № 4. P. 960–965.
7. Pavlyukevich N. V., Shnip A. I. Modeling heat transfer in the core of a nuclear power reactor in the presence of perturbations of hydrodynamic and energy parameters // J. Eng. Phys. Thermophys. 2022. Vol. 95, № 1. P. 29–36.
8. Перминов А. В., Никулин И. Л. Математическая модель процессов тепломассопереноса и диффузии магнитного поля в индукционной печи // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 2. С. 388.
9. Volker T., Odenbach S. Thermodiffusion in magnetic fluids // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2005. Vol. 289. P. 289–291.
10. Гринкруг Л. С., Соловьев С. В., Цой Р. И. Моделирование теплообмена электропроводной жидкости в цилиндрическом слое // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. 2013. № 2 (13). С. 36–42.
11. Аристов С. Н., Пухначёв В. В. Об уравнениях вращательно симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости // Доклады Академии наук. 2004. № 394. С. 611–614.
12. Aristov S. N., Gitman I. M. Viscous flow between two moving parallel disk: exact solutions and stability analysis // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 464. P. 209–215.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособ. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. 4-е изд., стереот. М. : Физматлит, 2005. 656 с.
14. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости : пер. с англ. М. : Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособ. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереот. М. : Физматлит, 2001. 736 с.

References

1. Elkhazen M.I., Hassen W., Gannoun R., Hussein A.K. and Borjini M.N. Numerical study of electroconvection in a dielectric layer between two cofocal elliptical cylinders subjected to unipolar injection. *Journal of engineering physics and thermophysics*. 2019;92(5):2358–2370.
2. Kashevskiy S.B., Kashevskiy B.E., Khudoley A.L. Experimental model for studying the dynamics of magnetic dispersion in a gradient magnetic field. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal = Engineering and physics journal*. 2018;91(1):184–194. (In Russ.)
3. Ahmed N. Heat and mass transfer in MHD poiseuille flow with porous walls. *Journal of engineering physics and thermophysics*. 2019;92(1):128–137.
4. Borisevich V.D., Potanin E.P. Magnetohydrodynamics and heat transfer in rotating flows. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal = Engineering and physics journal*. 2019;92(1):174–181. (In Russ.)
5. Fedorov S.V. Magnetic field enhancement in jet flows of conducting materials: collision of two jets with a magnetic field. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal = Engineering and physics journal*. 2021;94(3):675–685. (In Russ.)
6. Belabid J. Hydromagnetic natural convection from a horizontal porous annulus with heat generation or absorption. *Journal of engineering physics and thermophysics*. 2021;94(4):960–965.
7. Pavlyukevich N.V., Shnip A.I. Modeling heat transfer in the core of a nuclear power reactor in the presence of perturbations of hydrodynamic and energy parameters. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2022;95(1):29–36.
8. Perminov A.V., Nikulin I.L. Mathematical model of heat and mass transfer processes and magnetic field diffusion in an induction furnace. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal = Engineering and physics journal*. 2016;89(2):388. (In Russ.)
9. Volker T., Odenbach S. Thermodiffusion in magnetic fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2005;289:289–291.
10. Grinkrug L.S., Solov'ev S.V., Tsoy R.I. Modeling heat transfer of an electrically conductive liquid in a cylindrical layer. *Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universiteta im. Sholom-Aleykhema = Bulletin of Sholem Aleichem Primorsky State University*. 2013;(2):36–42. (In Russ.)
11. Aristov S.N., Pukhnachev V.V. On the equations of rotationally symmetric motion of a viscous incompressible fluid. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*. 2004;(394):611–614. (In Russ.)
12. Aristov S.N., Gitman I.M. Viscous flow between two moving parallel disk: exact solutions and stability analysis. *J. Fluid Mech.* 2002;464:209–215.
13. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: ucheb. posob. T. VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred. 4-e izd., stereot. = Theoretical physics: textbook. Volume 8. Electrodynamics of continuous media. The 4th edition, stereot.* Moscow: Fizmatlit, 2005:656. (In Russ.)
14. Patankar S. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti: per. s angl. = Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics: translated from English*. Moscow: Energoatomizdat, 1984:152. (In Russ.)
15. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: ucheb. posob. T. VI. Gidrodinamika. 5-e izd., stereot. = Theoretical physics: textbook. Volume 6. Hydrodynamics. The 5th edition, stereot.* Moscow: Fizmatlit, 2001:736. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Викторович Соловьев

доктор физико-математических наук,
профессор, ведущий научный
сотрудник, Вычислительный центр
Дальневосточного отделения
Российской академии наук (Россия,
г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65)

E-mail: solovjovsv@rambler.ru

Sergey V. Solov'ev

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, leading researcher,
Computing Center of Far Eastern Branch
of the Russian Academy of Sciences
(65 Kim Yu Chen street, Khabarovsk,
Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 21.01.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 19.03.2025

Принята к публикации / Accepted 07.04.2025

Уважаемые читатели!

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год. Научные направления (группы специальностей):

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

1.1.6. Вычислительная математика

1.3.3. Теоретическая физика

1.3.6. Оптика

1.3.8. Физика конденсированного состояния

1.3.11. Физика полупроводников

1.3.15. Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий

Стоимость одного номера журнала – 500 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс/тел. +7 (8412) 64-32-89. E-mail: volgavuz@pnzgu.ru

Подписку можно также оформить по объединенному каталогу «Пресса России» тематические разделы «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов». Подписной индекс – 82413.

ЗАЯВКА

Прошу оформить подписку на журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» на 20__ г.

№ 1 – _____ шт., № 2 – _____ шт., № 3 – _____ шт., № 4 – _____ шт.

Наименование организации (полное) _____

ИНН _____ КПП _____

Почтовый индекс _____

Республика, край, область _____

Город (населенный пункт) _____

Улица _____ Дом _____

Корпус _____ Офис _____

ФИО ответственного _____

Должность _____

Тел. _____ Факс _____ E-mail _____

Руководитель предприятия _____

(подпись)

(ФИО)

Дата « ____ » _____ 20__ г.